ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN ARCHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET cylindro, atque alios quosdam, Commentaria, nunc primum & Græce & Latine in lucem edita.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio, ad quinquennium.

[redacted]

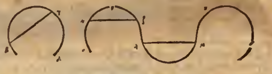
Basileae
Ioannes Hervagius excudi fecit
An. MDXLIIII.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρὼν σύνταξιν καταβεβλημένον. καὶ κατανοήσας μὴ δὲ τὴν εὐμάρειαν τῶν θεωρημάτων τοῦτο παρεωρᾶσθαι, ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ δυσεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατ' ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πω καθεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλους ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τριῶν δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ πλημμελὲς διὰ νεότητα φθέγξομαι, τοῦτο ὑπὸ τῆς σῆς περὶ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας, καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκά σοι κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπον δ' ἂν εἴη τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀνεμέσητον δόξῃ τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴ δὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς. εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντῃ διαμαρτάνον, δήλωσον ἣν ἔχεις περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὥς γε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθεὶς, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συντάξεων ἑρμηνεῦσαι. † Δυσθεώρετα

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

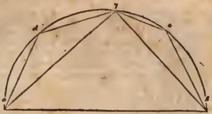
Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ' αὐτοῦ θεωρήματα, τὸ σύνηθες πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ' ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται. καὶ φησὶ πρότερον τινὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἳ τινῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δὲ ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁπωσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται ὡς ἡ α β γ δ. ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἵνα δὲ τούτων κοινὴ ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν ἦν λαβεῖν ἐπί τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε



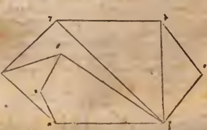
τὴν ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μηδέτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ' αὐτὴν ἐφαρμόζειν. διό φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία. τὰ δ' αὐτὰ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματά τινα λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν καθ' αὑτὰ τῇ αἰσθήσει ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἐκ τῆς κοινῆς ἐννοίας, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἰτημάτων τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μὲν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ α, β. φησὶ δὴ δεῖ ὅθεν αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθῶς ὑπετάξατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β, τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί. πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ ταῖς α γ β γραμμαῖς ἄλλα τυ-

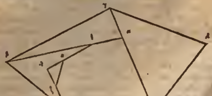
χόντα σημεῖα τὰ δ, ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε. ὁμοίως δὴ καὶ ἐν τούτῳ δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα, εὐθείας εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἔτι μείζους εὑρήσομεν. ὥστε τὸ ἐκ τούτου συμφανές ἐστιν, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ, δυνατοῦ ὄντος καὶ παρ' αὐτὸ τὸ σημεῖον ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν εἰς αὐτὴν οὖσαν γραμμήν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἐνδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας προλαβεῖν.



Μετὰ δὲ τοῦτό φησιν, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἐπεκτείνεται εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ, ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχῃ, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νοείσθωσαν γὰρ πρὸς τὸ καὶ τοῦτο κατάδηλον γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ αζ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἐπὶ περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοί εἰσιν αἱ προκείμεναι γραμμαί, καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ, ἐντὸς συνεστάμεναι εἰσὶν αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶν αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ' αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγ, γζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ βγζ συνεστάμεναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζους αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ, αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγ, δεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.



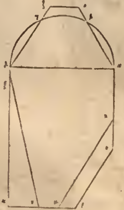
Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθκε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νοείσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοινὴ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζη, ηθ. ἀλλ' αἱ αλ, λθ ἐλάττους τῆς αβθ, πολλῷ ἄρα ἡ αβθ μείζων τῆς αζηθ.



κοινὰ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβ θκ τῶν αζ, ζθκ. ἀλλ' αἱ βθκ ἐλάττους τῶν βγκ. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβγκ τῆς αζθκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβγκε μείζους τῆς αζθκε. ἀλλ' αἱ γκε ἐλάττους τῶν γδε, πολλῷ ἄρα αἱ αβγδε μείζους εἰσὶ τῶν αζθκε.

Καὶ περιφέρειαι δὲ ὥσπερ, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ χρὴ νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ὑπ' αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἁρμόσει ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῆς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν περιτιθεισῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν ἐκ συνεχῶν σημείων τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοεῖσθαι. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμάς, πάντῃ ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς. ἡ γὰρ αβγδ γραμμή, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῆς αηθκδ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόκειται, τὸ δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν αηθκδ, καὶ αλμνξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινά ἐστι, ὡς τὰ αλ, μν.



† νοεῖσθαι

† ἐπέθηκεν

Δέοντος δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ' ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπ' ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσί, ἀλλ' ἐνίοτε ἴσαι, ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νοείσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζγ τῆς αγ μείζους εἰσί, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὡς τι μιᾶς γραμμῆς νενευμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης, ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.



Καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ ἔστι θεωρῆσαι. νοείσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζευγμένη ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θκ κατὰ τὸ

κ,

κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζ κ ἤχθω ἡ κ λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κ λ. καὶ πάλιν τῇ κ λ ἴση ἡ κ μ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μ λ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κ δ ἤχθω ἡ λ ε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν γ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δ ζ τῶν α β, ἡ δὲ ζ κ τῆς α η, ἡ δὲ κ ν τῶν κ λ, ἡ δὲ ν γ τῶν λ γ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δ ζ κ ν γ μείζων τῶν α β κ λ γ. καλῶς ἄρα προστέθη τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα ✱ αἱ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδοις.



ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

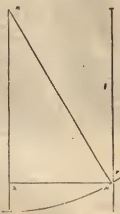
Τὸ διὰ α γ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ, διὰ τὸ ὡς τὸ α β, ἤτοι ἐπιμορίου, ἢ ἐπιμερούς τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ εἴη τὸ α β τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἐκ τοῦ α β, ἴσου τῷ δ τοῦ β γ, τὸ λοιπὸν τὸ γ α ὑπερέξει τοῦ δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτό, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ α γ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ α θ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ζ η πρὸς ζ ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β πρὸς β γ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον. καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ. δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, β γ, δ ε, ε ζ. τὸ δὲ α β πρὸς τὸ β γ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δ ε πρὸς τὸ ε ζ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ α γ πρὸς τὸ γ β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς τὸ ζ ε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γ β πρὸς τὸ β α, οὕτως τὸ ζ ε πρὸς τὸ ζ θ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ α β πρὸς τὸ β γ, οὕτως τὸ θ ζ πρὸς τὸ ζ ε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ α β πρὸς τὸ β γ, ἤπερ τὸ δ ε πρὸς ε ζ. καὶ τὸ ζ θ ἄρα πρὸς ζ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ε πρὸς ε ζ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζ θ τοῦ ε δ, καὶ ὅλον τὸ θ ε τοῦ δ ζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θ ε πρὸς ε ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς ζ ε. ἀλλ᾽ ὡς τὸ θ ε πρὸς ε ζ, τὸ α γ πρὸς γ β. διὰ τὸ συνθέντι, καὶ τὸ α γ ἄρα πρὸς γ β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς ε ζ. ἀλλὰ δὴ τὸ α γ πρὸς γ β μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς ζ ε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ α β πρὸς β γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ε πρὸς ε ζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ β γ πρὸς γ α, οὕτως τὸ ζ ε, καὶ τὸ θ ε μεῖζον τοῦ δ ζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ε ζ, ἔσται μεῖζον τὸ θ ζ τοῦ δ ε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θ ζ πρὸς ζ ε, τουτέστι τὸ α β πρὸς β γ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δ ε πρὸς ε ζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ α β πρὸς τὸ β γ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τὸ δ ε πρὸς ε ζ, καὶ συνθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ α γ πρὸς β γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς ζ ε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γ α πρὸς α β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς δ ε. ἐπεὶ γὰρ τὸ α γ πρὸς γ β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς ζ ε, καὶ διελόντι τὸ α β πρὸς β γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ε πρὸς ε ζ.



ἀνά-

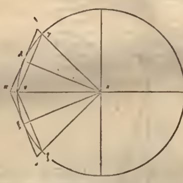
ἀνάπαλιν τὸ βγ πρὸς βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς εδ, καὶ συνθέντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.



Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κμ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κλ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κχ. καὶ κέντρῳ τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κχ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χμν. ἔστι γὰρ ἡ κμ ἴση τῇ κχ, τουτέστι τῇ θ.

Η ἄρα νγ πολυγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς οὔσης τεταρτημορίου βεβηκυίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ οπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξκν γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ πκδ, ἀπὸ τοῦ π ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς πθ ἴσην τῇ ὑπὸ πκδ, ἔσται ἴση ἡ πθ τῇ πο, ὡς ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξκ ἴση ἐστὶ τῇ κδ, κοινὴ δὲ ἡ κπ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξπ τῇ πδ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ πξκ ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ πδκ. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δπ. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τὸ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ πκδ, δκθ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δκ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πδ τῇ θδ. ἀλλ' ἡ ξπ τῇ πδ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θπ ἄρα τῇ πο ἐστὶν ἴση, καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις, ὥστε ἡ θπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θπ τῇ πο, τῆς δὲ γν τῇ νν, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ οπ τῇ γν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ πθ τῇ νκ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γνκ τῇ ὑπὸ οπθ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



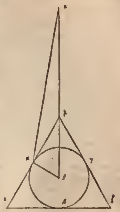
Η ἄρα μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γκ πρὸς κτ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τὸ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γκτ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γκτ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ λκρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λμ νοουμένου, τὸ λκρ τρίγωνον τῷ γκτ ὅμοιον ἐστίν, ὡς ἡ ρκ πρὸς κλ, οὕτως ἡ γκ πρὸς κτ. ὥστε καὶ ἡ μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γκ πρὸς κτ.

ΕΙΣ ΤΟ ς

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσον ἐστὶ τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσον ἐστὶ τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ β χωρίου.

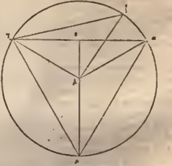
ΕΙΣ ΤΟ Η.

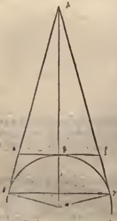
Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι εἰσὶν ἐπ᾽ αὐτάς. νενοήσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ κ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἡ κα. λέγω ὅτι ἡ κα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ κθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ διὰ αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ κθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθάς, ἦκται ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ κθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν κα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ ἐπὶ τὰ γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὰς δζ, εζ. ἐπιστῆσαι δὲ χρή, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς προέκειτο, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. οὐ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἐδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προέθηκε τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, διὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὁποῖαι τις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.



ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τὸ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ, καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ.





ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μεῖζονι ὄντι τοῦ αδε. καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ, τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονά ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

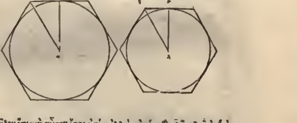
Ἤχθω γὰρ ἡ αζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. εἰ γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, διχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δθ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ κβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

ται. ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπεζεύχθω ἡ θ β. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δ η β, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δ ζ ε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ε δ τῇ δ ζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζ η τῇ α γ.

Περιγραφομένων δὲ πολυγώνων περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομεν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ ν χωρίου. ὅτι μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονα ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατόν ἐστι, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτο φησί, ὃ καὶ ἔστιν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ς θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ ε δ ζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α δ, δ γ, καὶ τῆς α β γ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπιζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δ β ζ, μείζων ἐστὶν ἡ δ ζ τῆς β ζ. ἡ δὲ ζ β τῇ ζ γ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δ ζ ἄρα τῆς ζ γ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δ β ζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β ζ γ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ β ζ γ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ, καὶ τὸ δ β η τοῦ β η α μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δ ε ζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α δ γ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστιν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκ ἔτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅνπερ καὶ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τοιοῦτον, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκ ἔτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κ ε, κ μ, λ θ, λ ν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κ ε, λ θ ἐκ τῶν κέντρων * τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας * δυνάμει ὥστε τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κ ε μ, λ θ ν. ἡμίσειαι * τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις



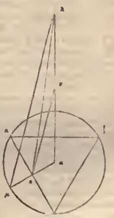
ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κ ε μ, λ θ ν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κ ε πρὸς λ θ, ἡ κ μ πρὸς λ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ κ ε πρὸς τὸ ἀπὸ θ λ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ μ πρὸς τὸ ἀπὸ λ ν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κ τ δ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τ δ πρὸς η δυνάμει, τουτέστιν ἡ τ δ πρὸς ρ ζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ζ ρ λ, ἴσον δὲ τὸ κ τ δ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κ τ δ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ζ ρ λ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμ-

μένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφή, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζθκ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θκ, κάθετος ἤχθω ἡ αν. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς αν διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νενοήσθω δὴ καὶ ἡ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ ν ἐπεζεύγμένη ἡ λν κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θκ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ ν θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρον ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ᾽ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λν. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ αν. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λν, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ᾽ ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λν, διπλάσιον ἐστὶ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τριγώνου. ὥς τε ἐστὶν ὡς ἡ αν πρὸς νλ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἀχθείσης δὴ τῆς ντ παρὰ τὴν μλ, ἔσται ὡς ἡ αμ πρὸς μλ, ἡ αν πρὸς ντ. ἡ δὲ αν πρὸς ντ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν νλ. μείζων γὰρ ἡ λν τῆς ντ. καὶ ἡ αμ ἄρα πρὸς μλ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αν πρὸς νλ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



ΕΙΣ ΤΟ Ις.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αν, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ αν, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αν. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ αν, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς αν, ἡ βδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βδ, αν. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δζ. διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αν ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ δα, αν, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, αν, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ. καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ αδ, αν.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν αγ διάμετρον. πάσας τὰς πλευρὰς κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμως ἐσομένου αὐτοῦ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου, μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δύναται τὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς εἴρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

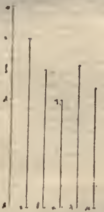
Ἡ δὲ κθ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἐφάπτεται ἡ κξ τοῦ αβγδ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χκ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ χκ τῇ χζ. εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κμ τῇ μζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζχ τῇ χθ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χμ τῇ κθ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θζ πρὸς ζχ, οὕτως ἡ κθ πρὸς χμ. διπλῆ δὲ ἡ θζ τῆς χζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κθ τῆς χμ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ αβγδ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ελ πρὸς ακ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ κλ, γκ, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς κ, λ. καὶ παράλληλος ἡ ακ τῇ λε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ κλε τρίγωνον, τῷ γκα τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λε, οὕτως ἡ γκ πρὸς κα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ κλ πρὸς λε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γκ πρὸς κα, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ με πρὸς ελ, οὕτως ἡ μα πρὸς ακ. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ελ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ακ, ἀλλ' ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ελ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ελ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, τῆς ελ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν ακ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ακ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ακ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς ακ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ ακ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ελ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν ακ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ελ πρὸς ακ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ελ πρὸς ακ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ προκείμενόν ἐστι, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ, ὅταν τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ τοῦτο οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, γκ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς αβ ἴσης τῇ γκ, τῆς βδ, ἡ λοιπὴ ἡ αδ τετμήσθω τριχῇ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν εβ ἴση κείσθω ἡ η, τῇ δὲ βζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ι, η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ αβ ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τοῦ η. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ αβ, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν ἡ αβ πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ πρὸς η. ὥστε ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ε θ, ἐπὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ ε ζ, γ δ, κ α, πρὸς τὴν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ λ ε πρὸς ε θ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τοῦ δὲ ὑπὸ ε λ, κ θ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ θ α. καὶ γὰρ τοῦ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. ὡς ἔστι δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς α λ. καὶ διὰ τὸ ὅμοιον γινόμενον τὸ θ α κ τρίγωνον τῷ θ α λ. ἔστι γὰρ ὡς ἡ λ θ πρὸς θ α, ἡ α θ πρὸς θ κ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Ἔξει δὴ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ θ, ε, λ ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ μ ζ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται τῆς κολούρου ἐπιφανείας ἐπιθήσεται, ὁ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ζ μ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ζ η καὶ τῆς μ ν. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς μ α γινομένῃ κολούρου κώνου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς μ α καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς α β καὶ μ ν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ζ μ μείζων τῆς μ α, ἡ δὲ ζ η τῆς α β. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ζ μ, ν η μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ μ α, ν β ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κ ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκοῦσι συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ᾽ ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπειδὴ ὁ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν δύναται τὸ ὑπὸ μ θ, ζ η, τὸ δὲ ὑπὸ μ θ, ζ η, μεῖζον τοῦ ὑπὸ γ δ, δ ξ. ἡ μὲν γὰρ μ θ ἴση δέδεικται τῇ γ δ. ἡ δὲ ζ η μείζων τῆς δ ξ. ὁ ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ γ δ, δ ξ. τὸ δὲ ὑπὸ γ δ, δ ξ, ἴσον τῷ ἀπὸ δ α. ὁ ἄρα ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ α.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δ λ κ, παράλληλος οὖσα τῇ ε κ τῇ α λ, ἔστιν ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ. ὡς δὲ ἡ ε δ πρὸς δ α, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ἡμίσεια τῆς ε ζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς α γ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ ε κ πρὸς α λ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ε κ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τοῦ μὲν τῆς ε κ πρὸς α λ λόγου διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς ε κ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καί ἐστιν ὡς ἡ ε κ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ α λ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ᾽ ἀμφοτέρας τὰς ε κ, α λ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ε λ πρὸς δ α, τουτέστιν ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον.

Ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ

ἐπιφανείᾳ

ἐπιφανεία τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

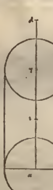
ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

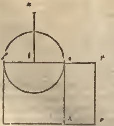
Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦτο ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

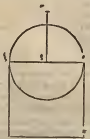
Εὐτοκίου ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ
ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθόν ἐστι καὶ τὰ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασι σαφηνίσαι. φησὶ δὲ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω ὁ δοθεὶς κῶνος, ἢ κύλινδρος ἡμιόλιος κύλινδρος. ἔστι δὲ διχῶς δυνατὸν τοῦτο εἰπεῖν. ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νοείσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α γ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ α γ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ α γ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς α γ ἡμίσεια ἡ γ δ, ἡ ἄρα α δ ἡμιολία ἐστὶ τῆς α γ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α δ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ α γ. οἱ γὰρ ὑπὸ τὴν αὐτὴν βάσιν ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ α γ, τμηθείσης τῆς α γ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α ε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ α γ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α γ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν α γ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ α ε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ α ε κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ α γ κώνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, ἐν τε τῷ προτεθέντι,

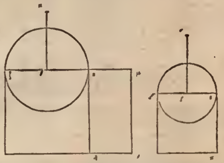


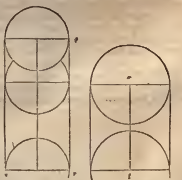




καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. ἔστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζ η κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θ κ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζ η διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζ λ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζ η, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ η μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ ν παραλλη-

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζκ. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζκ. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζκ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ, καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσωμεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζκ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ ποριζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις διδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἡ διδομένη, ἀλλὰ ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ περιτεθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.





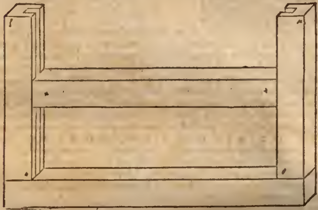
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτοῦ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, ληξάσης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομένων, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι, τί λέγω περὶ Εὐδόξου,

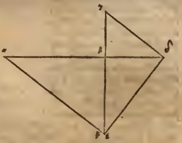
λέξει, ἀλλὰ περὶ τὴν κατὰ μετρίους τινὰς γεωμετρίαν ἀναστρεφομένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐν τούτοις γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζ η θ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει, οἷον τῷ ζ η, κινείσθω κανὼν ὁ κ λ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζ η, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ η θ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θ η, παράλληλον δὲ τῷ ζ η, ὡς τὸ θ μ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζ η, θ μ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κ λ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κ λ παράλληλος ἀεὶ τῷ η θ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας



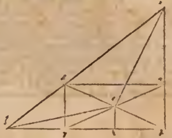
τυχὸν τὸ η θ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία καὶ ὁ κ λ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς β δ εὐθείας ᾖ, τοῦ η θ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κ λ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς β ε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γ δ ε. τὸν δὲ κ λ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ ε α. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἔστιν ὡς ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ δ β πρὸς β ε, καὶ ἡ ε β πρὸς β α.



ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς Βελοποιικοῖς.

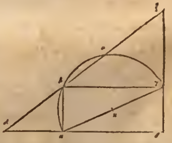
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ β δ παραλ-

ραλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, β δ. φανερὸν δή, ὅτι ἴσαι οὖσαι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δ γ, δ α ἐπὶ τὰ ζ η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζ β η, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β, καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμνει ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς ε η, ε ζ. καὶ νοείσθω ἀποτέμνον, καὶ θέσιν ἐχέτω τὴν ζ β η, ἴσων ὡς εἴρηται γενομένων τῶν ε η, ε ζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γ δ κάθετος ἡ ε θ, δίχα δὴ τέμνει δῆλον ὅτι τὴν γ δ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γ δ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γ ζ, τὸ ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ γ θ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θ ζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ε θ. τὸ ἄρα ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τῶν ἀπὸ γ θ, θ ε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζ θ, θ ε. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ γ θ, θ ε, ἴσον τὸ ἀπὸ γ ε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζ θ, θ ε, ἴσον τὸ ἀπὸ ε ζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ γ ε, ἴσον τῷ ἀπὸ ε ζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δ η α μετὰ τοῦ ἀπὸ α ε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε η. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν α ε τῇ ε γ, ἡ δὲ η ε τῇ ε ζ. καὶ τὸ ὑπὸ δ ζ γ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δ η α. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ζ δ πρὸς δ η, οὕτως ἡ α η πρὸς γ ζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζ δ πρὸς δ η, οὕτως ἡ ζ γ πρὸς γ β, καὶ ἡ β α πρὸς α η. τριγώνου γὰρ τοῦ ζ δ η παρὰ μίαν μὲν τὴν δ η, ἦκται ἡ γ β. παρὰ δὲ τὴν δ ζ ἡ α β. ὡς ἄρα ἡ β α πρὸς α η, οὕτως ἡ α η πρὸς γ ζ, καὶ ἡ γ ζ πρὸς γ β. τῶν ἄρα α β, β γ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α η, γ ζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς α γ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ α β ε γ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν β α, ἡ α δ. τῇ δὲ β γ ἡ γ ζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τῷ β, τέμνων τὰς α δ, γ ζ. καὶ κινείσθω περὶ τὸ β, ἄχρις οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γ ζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δ β ε ζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δ β τῇ ε ζ. λέγω ὅτι αἱ α δ, γ ζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν α β, β γ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δ α, ζ γ, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν β α, ζ θ, ἡ πρὸς τῷ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ α ε γ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δ β τῇ ε ζ, καὶ τὸ ὑπὸ ε δ β ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ β ζ ε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ε δ β, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ δ α. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ β ζ ε, ἴσον τῷ ὑπὸ θ ζ γ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θ δ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ ζ γ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς θ ζ, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς δ α. ἀλλ' ὡς ἡ θ δ πρὸς θ ζ, οὕτως ἥ τε β γ πρὸς γ ζ, καὶ ἡ δ α πρὸς α β. τριγώνου γὰρ τοῦ δ θ ζ, παρὰ μὲν τὴν δ θ, ἦκται ἡ β γ. παρὰ δὲ τὴν θ ζ ἡ β α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β γ πρὸς ζ γ, ἡ γ ζ πρὸς δ α, ἡ δ α πρὸς α β, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.

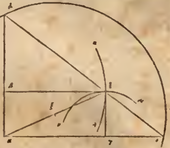


ἔστιν

κέον δέ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδόν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῆς, καὶ αἱ παρεμβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ β α, θ γ. καὶ ὁ περὶ τὸ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς α γ, τουτέστι τοῦ κ, ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀποτέμνωνται πρὸς ταῖς θ δ, β ζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κ δ, κ ζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δ β ἴση γένηται τῇ ε ζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δ β, ε ζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διηρημένου τοῦ δ ζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ καρκίνου διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

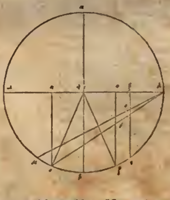
ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ α β, α γ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ α γ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κ θ λ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ α β κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μ θ ν. καὶ τεμνέτω τὴν κ θ λ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ α, θ β, θ γ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ α γ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θ α. τετμήσθω δίχα ἡ θ α τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς α β, α γ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς α δ, α ε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.



ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

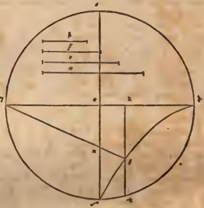
Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ α β, γ δ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ ε β, β ζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ α β ἤχθω ἡ ζ η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δ ε. λέγω ὅτι τῶν γ η, η θ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζ η, η δ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ α β παράλληλος ἡ ε κ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ε κ τῇ ζ η, ἡ δὲ κ γ τῇ η δ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γ λ ε, ζ λ δ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὴν λ ε τῇ λ ζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γ κ τῇ η δ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δ κ πρὸς κ ε, ἡ δ η πρὸς η θ, ἀλλ' ὡς ἡ δ κ πρὸς κ ε, ἡ ε κ πρὸς κ γ. μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ ε κ τῶν δ κ, κ γ. ὡς ἄρα ἡ δ κ πρὸς κ ε, καὶ ἡ ε κ πρὸς κ γ, οὕτως ἡ δ η πρὸς η θ. καὶ ἐστιν ἴση ἡ μὲν δ κ τῇ γ η, ἡ δὲ κ ε τῇ ζ η, ἡ δὲ κ γ τῇ η δ. ὡς ἄρα ἡ γ η πρὸς η ζ, ἡ ζ η πρὸς η δ, καὶ ἡ δ η πρὸς η θ. ἐὰν δὲ παρ' ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μ β, β ν.



καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ α β ἡ ν ξ. ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δ μ. ἔσονται πάλιν τῶν γ ξ, ξ ο μέσαι ἀνάλογον αἱ ν ξ, ξ δ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μετα

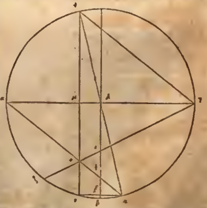
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων τεθεισῶν ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπὶ τὰ γενόμενα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ, καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ, μέσαι ἀνάλογον ἔσονται τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

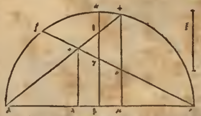
Προέθετο μὲν ὁ πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα τὸν δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐτὸς ἐπὶ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον. ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ προκεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς δε.



δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παρακείσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας, καὶ τῆς βκγ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ακ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ηθ, θκ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ θη, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω δὲ ἥ τε αλ καὶ ἡ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ὑπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς μα, οὕτως τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον. τῶν ἄρα ὁρισθεισῶν εὕρηνται δύο μέσαι ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εὑρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ ακ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστι, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως. ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ ην τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ. ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ περιφέρεια τῇ βν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γμ πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα. καὶ ἡ αμ πρὸς μη. ἴση δέ ἐστιν ἡ νμ τῇ μλ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη. τῶν ἄρα γμ, μη μέσαι ἀνάλογον εἰσὶν αἱ λμ, μα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ ηλ, κμ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ μβ πρὸς βλ. ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς ηλ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ ηλ πρὸς νμ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δμ πρὸς μκ, ἡ κμ πρὸς με. ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτως τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μκ,

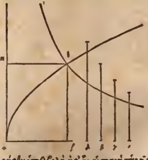


τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. ἴση γὰρ ἡ δβ

τῇ β α. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ, ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ θβ πρὸς γβ. ἀλλ' ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ. εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ. ἡ δὲ θβ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ βθ πρὸς ξ. ἀλλ' ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ, καὶ ἡ ξ πρὸς βγ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστι, τῇ ὑπὸ πάππου καὶ διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

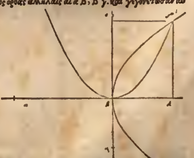
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ, τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κθζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ αη πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή, ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ αθ.



καὶ ὀρθὴ ἡ ακ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δ, ε, τεμεῖ δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ, ἴσον τῷ ὑπὸ δ, γ, ἐστὶν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δ, ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἐστὶν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε. ἀλλ' ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, καὶ ἡ ζα πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον εἰσίν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, καὶ τὴν βε πρὸς βα. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς βε. τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῷ εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ



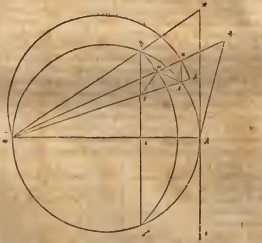
τῷ

τῷ ὑπὸ ε β, τουτέστι τῇ δ ζ. τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν β δ. ἅπτεται δὲ καὶ ὑπερβολῆς δοθείσης τῆς περὶ τὴν β ζ. δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζ δ, ζ ε. καὶ δοθέντα τὰ δ, ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ α β, β γ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, β δ, β ε. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν β ε παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν β ε, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν β γ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δ β παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν α β. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζ δ, ζ ε. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ ε, τουτέστιν ἡ δ β, τὸ ἄρα ὑπὸ γ β ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ β δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ δ β πρὸς β ε. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ δ, τουτέστιν ἡ ε β, τὸ ἄρα ὑπὸ δ β α ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ β πρὸς β ε, ἡ β ε πρὸς β α. ἀλλ' ὡς ἡ δ β πρὸς β ε, οὕτως ἡ γ β πρὸς β δ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ β δ πρὸς β ε, καὶ ἡ ε β πρὸς β α. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗμος ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α δ, γ. δεῖ δὴ τῶν α δ, γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν α δ κύκλος, ὁ α β δ ζ. καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ α β. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ, ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π. παρὰ δὲ τὴν π δ ο ἤχθω ἡ β ε ζ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ α β δ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς α δ ἡμικύκλιον ὀρθόν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β, μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου τεμεῖ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινά. πάλιν δὲ ἐὰν τῆς α δ



μενούσης τὸ α π δ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ α π εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δ κ α. τὸ δὲ

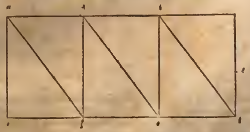
αὐτὸ

αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ δ κ α. τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ β μ ζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ β δ ζ α κύκλου ἔστω ἡ β ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ β δ α ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κ ι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ β ζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ α λ τῷ β μ ζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κ δ, μ ι, μ θ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δ κ α, β μ ζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μ θ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν β ζ ὀρθή ἐστιν ἡ μ θ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θ β, θ ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ α, θ ι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μ θ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ α μ ι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μ ι θ, μ α θ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ι μ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ κ α ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κ δ, μ ι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δ α πρὸς α κ, τουτέστιν ἡ κ α πρὸς α ι, οὕτως ἡ ι α πρὸς α μ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δ α, α κ, α ι, α μ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καὶ ἐστιν ἡ α μ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ α β. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α δ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ α κ, α ι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν.

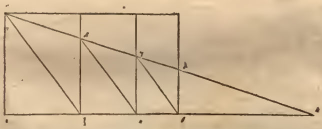
Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασὶν, εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιος ἔστω. τοῦ δὲ τοῦ κύβου μὴ σφαλεὶς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὲ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειε. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο δοθεισῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινά φασι Δηλίους ἐπιβαλλομένους νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοὺς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ Μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν ἢ μέδιμνον εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα. δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νευρὰ, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-



σεως.

ὡς. ἡ δὲ ἀπόδειξις καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραπται. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε. καὶ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι. μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζι συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἕως οὗ γένηται τὰ α β γ δ κατ' εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, καὶ ἡ κζ πρὸς κη. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ἐν δὲ ταῖς βη, γθ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ. ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ. ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη. ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, καὶ ἡ γη πρὸς δθ. ηὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥ τε βζ καὶ ἡ γη.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι, τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.



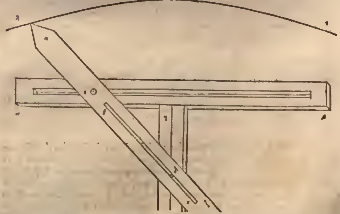
Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥ τε αε πρὸς βζ, καὶ ἡ βζ πρὸς γη. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ. ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, ἀεὶ ἑνὶ πλείους πινακίσκους καταστησόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦ γαθὲ τεύχειν
    φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τό δέ τοι πάρα καὶ σύγε μάνδρην
    Ἢ † σῆρον, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος.
Τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
    Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μὴ δὲ σύγ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
    Μὴ δὲ μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεοῦ δέος εὐδόξοιο,
    Κάμπυλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
    Ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
    Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
    Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὣς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
    Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

† σειρὸν

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓΧΟΕΙΔΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

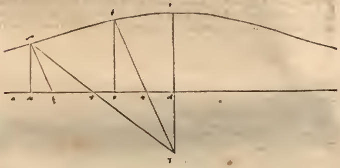
Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνήρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, ἔτι καὶ ἐλλείποις. τῶν τινων περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων δέ τε πρὸς ἐρατοσθένη συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὴν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως,



ὡς τὴν μίαν ἀκριβάζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν. καθάπερ εἰσὶν οἱ ΑΒ, ΓΔ. ἐν δὲ τῷ ΑΒ σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ ΓΔ ἐπὶ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ Δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν εζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν ηθ, δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥτις ἐγκάθεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυὴς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ αβ κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ εζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν ηθ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, εἶτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ αβ κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ ηθ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ εζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρου νοουμένης. τῆς δὲ εκ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τὶ γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεταί τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ λμν, ἥν τινα καλεῖ νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ εκ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

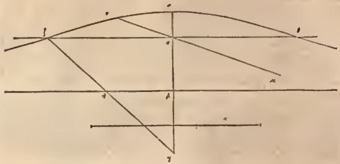
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ αβ κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ αβ κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ αβ. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζεη. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γθ, γζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν



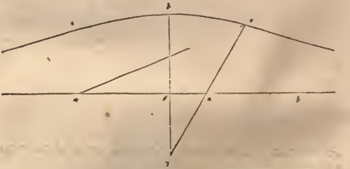
κθ, λζ. λέγω ὅτι ἡ ζμ κάθετος ἐλάττων τῆς θν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μλγ γωνίας τῆς ὑπὸ νκγ, λοιπὴ ἡ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μλζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ νκθ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησώμεθα τὴν ὑπὸ μζξ, ἡ κθ, τουτέστιν ἡ λζ πρὸς θν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξζ πρὸς ζμ. ὥστε ἡ ζλ πρὸς τὴν θν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζμ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θν τῆς ζμ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε αβ καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν, ὃ καὶ αὐτὸ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλός ἐστι τῷ αβ ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζηθ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἡ δε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζη κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἡ λζ πρὸς ζγ. ἀλλ' ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἦν ἡ δε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γζ. ἴση ἄρα ἡ δε τῇ λζ. ἀδύνατον. δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἴσαι ὡς ἡ μθν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ κ παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζκ. ἡ ἄρα ζκ συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



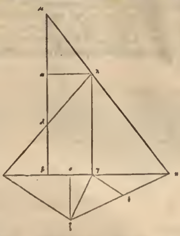
Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς α, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ. καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι



δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κοχλοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ. συμβάλλει ἄρα τῇ αη, διὰ τὸ προδειχθὲν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ, κατὰ τὸ η. τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γζ ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγθ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ ἢ τῇ γζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν, ἐδείχθη διὰ τῆς κοχλοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ, ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ, λέγω ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ γλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα,

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γε εζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κε εζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ, ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ ηγ. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ. ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τῷ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.



ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα, τῷ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

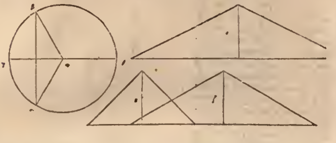
α δ

ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συντεθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥς τε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἶτα ἐφεξῆς δεικνύσας περαινόμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀποδείκνυσιν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γὰρ, τομεὺς δ' ἐστὶ στερεὸν καλεῖσθαι. ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ τὰν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς κώνου ἐπιφανείας τὰς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

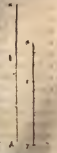
ἐπιφανείᾳ τοῦ σφαιρικοῦ τοῦ περιέχοντος τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νοείσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλῳ. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α. καὶ νοείσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον. ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ ἄρα κῶ-



νος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, ὅπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β γ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν β γ δ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καί εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις. ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν β γ δ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α. λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ β θ ζ α τομεύς, τῷ β θ ζ κ χώματι. ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ. ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ε κ, ἴσος τῷ τε ἀρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. λοιπὸν τὸ β θ ζ κ χῶμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θ κ. τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι τῷ β α θ ζ τομεῖ.



Ἐπαγαγὼν δὲ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δὲ ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ β α ζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ β κ ζ κώνῳ. καὶ προϊὼν φησὶν ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ὅλη ἡ κ δ πρὸς δ θ ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς δ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ θ γ πρὸς γ δ. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ δ πρὸς δ θ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. τουτέστιν ἡ κ θ πρὸς θ α. ἦν γὰρ ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. ἴση δὲ ἡ θ γ τῇ θ α. καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς δ θ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε γ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κ δ, α γ. καὶ ἔστω ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κ δ, πρὸς τὸ ὑπὸ κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς

τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ αεγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτως τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

ΩΣ δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς δγ, ἡ βδ πρὸς δα. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ δγ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται, ἄρα καὶ τὸ γ.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

ΚΑὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ κβ πρὸς βρ, καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ. ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λκ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ πρὸς λχ, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ. δέδοται δὲ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος. ἐπειδὴ ἡ μὲν ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ βχ τῶν β, χ περάτων αὐτῆς δεδομένων, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ. καὶ ὁ τῆς χζ πρὸς ζβ. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς τὸν ραγ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χρ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρλ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ λδ πρὸς λχ. Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λδ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν ἔννοιαν ἀναπεπληρῶσθαι λέλεκται,

Περὶ συνθέσεως λόγων.

κται, ὡς δεῖν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι καὶ Ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδὲν ἄτοπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἢ ἐπὶ μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὲ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὡς φασίν ἄλλοι τε καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς, καὶ Ἡρώνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. τοῦτον δὲ εἰπεῖν καὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, διό τ' ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς εἰς τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη ἀφ' ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἰ ἦν ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥστε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τῶν γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, ὅ ἐστιν ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ϛ ποιεῖ τὸν θ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὲ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν α γ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γ β ὁ ε. ὁ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α. ἐναλλάξ, ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ. ἀλλ' ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη ὁ η πρὸς τὸν γ. καὶ ὡς ἄρα ὁ η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ. ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η. ἀλλ' ὁ β



τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν. καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου. καὶ ἔστιν ὁ ζ τοῦ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ α γ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γ β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, καὶ τοῦ β, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ϛ πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει. τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ. λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑφ' ἐπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου,

καὶ τοῦ

ὁ τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὸν ϛ. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἥμισυ, ἥ τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ϛ. ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ϛ ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ β δ ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὲν εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπέσωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ κατὰ συνεχομένους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπεπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

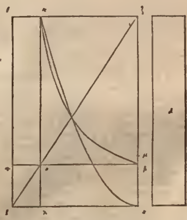


Ἔτι γοῦν τοῦ ῥητοῦ φησιν, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ, διὰ τὸ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἂν τεθῇ, ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ᾽ οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β ρ πίπτει οὕτω διαδείκνυμεν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ἤπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς θβ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λδ τῆς δκ, καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ὥστε καὶ ἡ λδ τῆς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θζ τῆς θβ. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ ζχ πρὸς ζθ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ τῆς βζ πρὸς θζ λόγου ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τῆς βζ πρὸς ζχ. ὁ αὐτὸς δὲ τῷ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς χζ πρὸς ζθ. ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς χζ πρὸς ζθ. καὶ δεῖ δοθεῖσαν τὴν δζ τέμνειν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προ-

ῥηθὲν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ἐν ᾧ ἐστι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβαλεῖν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ᾽ ἑτέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸς ἐν τῷ περὶ πυρείων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν ἀρχιμήδην, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδεμίαν μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλελειμμένα λόγον, ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι᾽ ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζον τὸ πρόβλημα, ἐν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ. οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐντετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν ἀρχιμήδει φίλην δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ ταῖς συνήθεσι τῶν ἀρχαίων τῶν πραγμάτων ὀνομασιν ἐγέγραπτο, τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται, τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ᾽ αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμῶν. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

† διορισμῶν

Εὐθείας δοθείσης τῆς α̅β̅, καὶ ἑτέρας τῆς α̅γ̅, καὶ χωρίου τοῦ δ̅, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς α̅β̅ σημεῖον ὡς τὸ ε̅. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α̅ε̅ πρὸς α̅γ̅, οὕτω τὸ δ̅ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ ε̅β̅. γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ α̅γ̅ πρὸς ὀρθὰς τῇ α̅β̅. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ̅ε̅ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ̅. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ̅ τῇ α̅β̅ παράλληλος ἡ γ̅η̅, διὰ δὲ τοῦ β̅ τῇ α̅γ̅ παράλληλος ἡ ζ̅η̅β̅, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γ̅ε̅, γ̅η̅. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ η̅θ̅ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε̅ ὁποτέρᾳ τῶν γ̅θ̅, η̅ζ̅ παράλληλος ἤχθω ἡ κ̅ε̅λ̅. καὶ τῷ δ̅ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ̅η̅μ̅. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε̅α̅ πρὸς α̅γ̅, οὕτως τὸ δ̅ πρὸς τὸ ἀπὸ ε̅β̅. ὡς δὲ ἡ ε̅α̅ πρὸς α̅γ̅, οὕτως ἡ γ̅η̅ πρὸς η̅ζ̅. ὡς δὲ ἡ γ̅η̅ πρὸς η̅ζ̅, οὕτως τὸ ἀπὸ γ̅η̅ πρὸς τὸ ὑπὸ γ̅η̅ζ̅. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ̅η̅ πρὸς τὸ ὑπὸ γ̅η̅ζ̅, οὕτως τὸ δ̅ πρὸς τὸ ἀπὸ ε̅β̅, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κ̅ζ̅. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ̅η̅ πρὸς τὸ δ̅, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γ̅η̅μ̅, οὕτως τὸ ὑπὸ γ̅η̅ζ̅ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ̅κ̅. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γ̅η̅ πρὸς τὸ ὑπὸ γ̅η̅μ̅, οὕτως ἡ γ̅η̅ πρὸς η̅μ̅. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ̅η̅ πρὸς η̅μ̅, οὕτως τὸ ὑπὸ γ̅η̅ζ̅ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ̅κ̅. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γ̅η̅ πρὸς η̅μ̅, τῆς η̅ζ̅ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ̅η̅ζ̅ πρὸς τὸ ὑπὸ μ̅η̅ζ̅.

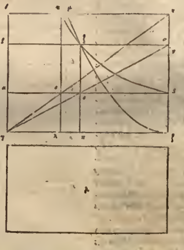


ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ̅η̅ζ̅ πρὸς τὸ ὑπὸ μ̅η̅ζ̅, οὕτως τὸ ὑπὸ γ̅η̅ζ̅ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ̅κ̅. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μ̅η̅ζ̅ τῷ ἀπὸ ζ̅κ̅. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζ̅η̅, γραφῇ διὰ τοῦ η̅ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η̅μ̅, ἥξει διὰ τοῦ κ̅. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν η̅μ̅ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς η̅γ̅ δεδομένης δοθὲν τὸ δ̅. τὸ ἄρα κ̅ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ η̅κ̅. πάλιν ἐπειδὴ τὸ θ̅λ̅ χωρίον

ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῷ γ β, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β κ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ η γραφῇ ὑπερβολή, ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θ γ, γ η, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κ β. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἅπτεται δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ. καὶ ἔστιν ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ κ ε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν α β. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ε α πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ ε β, καὶ τὸ δ. ὕψη δὲ αἱ ε α, α γ, αἱ ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ ε β ἐπὶ τὴν ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γ α. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς β α, ὅταν ᾖ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α.

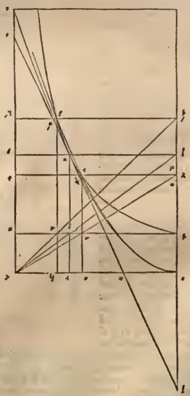
Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ α β. ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ α γ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν α β, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς α β τρίτον μέρος ἡ α ε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν α γ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστιν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ, τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ α γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ α β παράλληλος ἤχθω ἡ γ ζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ α γ παράλληλος ἤχθω ἡ β ζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γ ε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ θ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζ η παράλληλος ἤχθω ἡ κ ε λ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. ἐστὶν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς η κ. ἔστω οὖν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ ζ ν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ η, ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ η, οὕτως τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ ν. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ ν τῆς ζ η κοινοῦ ὕψους



λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ η μ τῷ ὑπὸ η ζ ν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζ η γράψωμεν παραβολήν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζ ν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μ ξ ζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θ λ τῷ α ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β ζ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ ζ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥ-

ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ β κ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ ξ ο π. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ α β παράλληλος ἤχθω ἡ ρ ξ σ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ β κ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θ γ, γ ζ. καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρ ξ π, ταῖς α β ζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρ ξ π τῷ ὑπὸ α β ζ, ὥστε καὶ τὸ ρ ο τῷ ο ζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ο σ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως ἡ ο β πρὸς β σ, τουτέστιν ἡ γ ζ πρὸς ζ σ. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ σ, τῆς ζ υ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ υ πρὸς τὸ ὑπὸ σ ζ υ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ υ πρὸς τὸ ὑπὸ σ ζ υ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γ ζ υ, τὸ δοθὲν χωρίον. τὸ δὲ ὑπὸ σ ζ υ, ἴσον τῷ ἀπὸ σ ξ, τουτέστι τῷ ἀπὸ β ο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δοθὲν χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β ο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

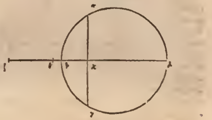
Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς β ε τῆς ε α, τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μέγιστον ἐστὶ πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς β α, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, ἡ α γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ ε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ α γ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γ ζ παράλληλοι τῇ α β ἤχθωσαν αἱ θ ζ, γ η. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γ α ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κ ε λ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η μ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. τὸ ἄρα ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν α γ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν α γ, μέγιστον ἐστὶ πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς β α λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζ η παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η μ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θ γ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ν γ η, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ β κ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζ β ἴση κείσθω ἡ β ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξ κ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς



διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ β ε τῆς ε α, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζ κ τῆς κ θ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ο θ κ τρίγωνον τῷ ξ ζ κ τριγώνῳ. διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ ο. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ π διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξ ζ τῆς ξ η. καὶ παράλληλον εἶναι τὴν π η τῇ κ ζ. ἴση ἄρα ἡ ο κ τῇ κ π, ἡ ἄρα ο κ π ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφάπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς α β τυχὸν σημεῖον τὸ ς, καὶ διὰ τοῦ ς τῇ κ λ παράλληλος ἤχθω ἡ τ ς υ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γ η παράλληλος ἤχθω ἡ φ τ χ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φ υ τῷ γ β, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γ ς. ἴσον γὰρ τὸ φ ς τῷ ς η, καὶ διὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ ς. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ς χ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψ χ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χ η μ διὰ τὴν παραβολήν, τὸ ἀπὸ τ χ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ χ η μ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τ χ ἴσον τὸ ὑπὸ χ η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ς α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η χ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η χ τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ χ η ω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. τὸ δὲ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν γ α, τὸ ἄρα ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ σ. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α. τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ σ τῇ κ λ παράλληλος ἡ ψ σ ρ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ. καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ α β ἡ α ρ β. συμβαλλέτω τῇ γ ζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γ ψ καὶ τὸ α γ, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ σ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ σ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α β τῷ ὑπὸ β η μ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρ β ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ β η μ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρ β ἴσον τῷ ὑπὸ β η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ σ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η β. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η β τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ β η ω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρ β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ β σ. τὸ ἄρα ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γ η μ τοῦ ὑπὸ γ η ω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, τοῦ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς α β ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α. συνέστησαν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι περὶ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, καὶ τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α ἔλασσον τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α κατὰ δύο σημεῖα τῆς α β τεμνομένην ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χ υ γραφομένην παραβολήν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η ω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολὴ πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γ υ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολήν, καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρ σ τέμνει τὴν α β κατὰ τὸ σ. ὥστε τὸ σ σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, τῷ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς β α δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν η, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολήν, τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ ς. τὸ δὲ ἀπωτέρω τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ σ.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντίθεται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς Ἀρχιμήδους

μηδείοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δ Β, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ Β ζ, καὶ ἡ δοθεῖσα ἡ ζ θ. κατηντήσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δ ζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χ ζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ χ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δ Β ἐπὶ τὴν Β ζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δειχθήσεται. εἰ δὲ ἴσον, τὸ Β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον ἔχον πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δ Β τῆς ζ Β, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν Β ζ τῆς ζ θ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δ Β τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζ θ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς δ Β ἐπὶ τῆς Β ζ. διὰ τὸ τὴν Β ζ τῆς ζ θ μείζονα εἶναι, ὅπερ ὑπάρχειν ὡς ἐδείξαμεν δυνατόν, καὶ ὅπως πρόκειται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ' ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ' ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δ ζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χ ζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ χ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δ Β τῆς Β ζ. καὶ μείζονα τὴν Β ζ τῆς ζ θ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καὶ φησίν, ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δ Β, Β ζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δ Β τῆς Β ζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς Β ζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δ Β κατὰ τὸ χ, οὐκ ἔτι ὡς πρότερον τὴν δ ζ εἰπών, ἀλλὰ τὴν δ Β δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμᾶς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτόν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δ ζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, Β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν Β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, Β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

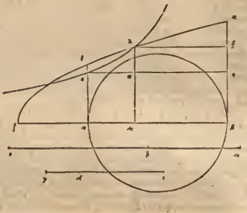


Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγραψάμεθα. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις ὑπὸ ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχὼν, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσελθεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως συνέγραψε τὸ πρῶτον ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ὑποσυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐντύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφέρετο.

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Την δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ α Β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν α Β, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ Β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. ἐκβεβλήσθω ἡ Β α ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς α Β ἡμίσεια ἡ α ζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γ ε πρὸς ε δ, ἐχέτω ἡ ζ α πρὸς α η, καὶ ἔστω ἡ α η πρὸς ὀρθὰς τῇ α Β. καὶ τῶν ζ α, α η μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ α θ. μείζων ἄρα ἡ α θ τῆς α η. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζ Β διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν α η. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζ α η ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ α θ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζ θ κ. καὶ διὰ τοῦ Β ἀνήχθω παρὰ τὴν

τὴν ᾱ θ ἡ β̄ κ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ̄, καὶ διὰ τοῦ θ̄ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζ β κ̄ γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ̄, τεμνέτω κατὰ τὸ λ̄. καὶ ἀπὸ τοῦ λ̄ ἐπὶ τὴν ᾱ β κάθετος ἤχθω ἡ λ̄ μ. καὶ διὰ τῶν κ̄, λ̄ τῇ ᾱ β παράλλη-



λοι ἤχθωσαν αἱ κ ν, λ ξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ κ λ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ β̄ κ, καὶ παράλληλοι ταῖς α κ ν, αἱ μ λ ξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α κ ν τῷ ὑπὸ μ λ̄ ξ, διὰ τὸ η̄ θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ᾽ ἡ μὲν κ ν τῇ ᾱ β ἴση ἐστίν, ἡ δὲ λ ξ τῇ μ β, τὸ ἄρα ὑπὸ λ μ β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ κ ᾱ β. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λ̄ μ πρὸς κ̄ α, οὕτως ἡ ᾱ β πρὸς β̄ μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λ̄ μ πρὸς τὸ ἀπὸ κ̄ α, οὕτως τὸ ἀπὸ ᾱ β πρὸς τὸ ἀπὸ β̄ μ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λ̄ μ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζ μ̄ α κ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ̄ μ πρὸς μ̄ λ, ἡ μ̄ λ πρὸς ᾱ κ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζ̄ μ πρὸς κ̄ α, οὕτως τὸ ἀπὸ λ̄ μ πρὸς τὸ ἀπὸ κ̄ α. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ λ̄ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ᾱ κ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ ᾱ β πρὸς τὸ ἀπὸ β̄ μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ᾱ β πρὸς τὸ ἀπὸ β̄ μ, οὕτως ἡ ζ̄ μ πρὸς κ̄ α. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ᾱ β πρὸς τὸ ἀπὸ β̄ μ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ᾱ β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β̄ μ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ᾱ β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β̄ μ, οὕτως ἡ ζ̄ μ πρὸς ᾱ κ. ὁ ἄρα κῶνος βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ᾱ β, ὕψος δὲ τὴν ᾱ κ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β̄ μ, ὕψος δὲ τὴν ζ̄ μ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ᾽ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ᾱ β, ὕψος δὲ τὴν ζ̄ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ᾱ κ, ἐστὶν ὡς ἡ ζ̄ α πρὸς ᾱ κ, τουτέστιν ἡ γ̄ ε πρὸς ε̄ δ. ἐπεὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὁ κῶνος ὁ ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ᾱ β, ὕψος δὲ τὴν ζ̄ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β̄ μ, ὕψος δὲ τὴν ζ̄ μ, ἐστὶν ὡς ἡ γ̄ ε πρὸς ε̄ δ. ἀλλ᾽ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ᾱ β, ὕψος δὲ τὴν ζ̄ α, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β̄ μ, ὕψος δὲ τὴν ζ̄ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β̄, ὕψος δὲ ἡ β̄ μ. ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γ̄ ε πρὸς ε̄ δ, καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ ᾱ, ὕψος δὲ ἡ ᾱ μ πρὸς τὸ

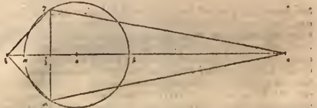
τμῆ

τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, ὅπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. τὸ ἄρα διὰ τοῦ κ μ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν α β, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ξ μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ο μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ ο, οὕτως ἡ α μ πρὸς μ β, ἀλλ' ὡς ἡ α μ πρὸς μ β, οὕτως τὸ ἀπὸ π μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ β. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β, οὕτως ἡ μ ζ πρὸς μ ο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, ὕψος δὲ τὴν μ ο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

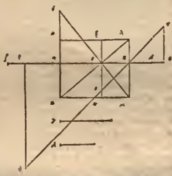
Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, περὶ λέγων ταῦτα. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ᾖ σφαῖρα ἡ α β γ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς α β, κέντρου δὲ τοῦ ε, ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν ε α, α ζ πρὸς ζ α, οὕτως τὴν η ζ πρὸς ζ β. ἔτι δὲ ὡς συναμφότερον τὴν ε β, β ζ πρὸς ζ β, οὕτως τὴν θ ζ πρὸς ζ α, ἀποδέδεικται



ὅτι τὸ μὲν γ β δ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ η. τὸ δὲ γ α δ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θ ζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ θ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζ η. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θ ζ πρὸς ζ η δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ ζ πρὸς ζ α, οὕτως συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς τὴν ζ β. διελόντι ὡς ἡ θ α πρὸς α ζ, οὕτως ἡ ε β πρὸς ζ β. διὰ τὰ αὐτὰ δή. καὶ ὡς ἡ η β πρὸς ζ β, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζ α. γίγνεται οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει οὔσης εὐθείας τῆς α β, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς ε β, τεμεῖν τὴν α β κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θ α, β η. ὥστε λόγον εἶναι τῆς θ ζ πρὸς ζ η δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θ α πρὸς α ζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζ β. ὡς δὲ τὴν η β πρὸς β ζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζ α. τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

οἷον

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζα, ηβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζε πρὸς τὴν εη. ἔτι δὲ εἶναι ὡς τὴν ζα πρὸς αε, οὕτως δοθεῖσάν τινα εὐθεῖαν πρὸς τὴν βε. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν εα. γεγονέτω, καὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θακ, λβμ. καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ακ, βμ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κε, με, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κμ. διὰ δὲ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ αβ ἡ λν. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ νκ ἡ ξεο. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ μβ πρὸς βε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση ἄρα ἡ ζα τῇ θα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη τῇ βλ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λβε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θαε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. κείσθω τῇ κα ἴση ἑκατέρα τῶν αρ, βσ. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θαε ἴση ἐστὶ τῇ ζε, συναμφότερος δὲ ἡ λβε ἴση τῇ εη, συναμφότερος δὲ ἡ καε ἴση τῇ ρε, συναμφότερος δὲ ἡ μβε ἴση τῇ σε. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε, τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρεσ. διὰ δὲ τοῦτο ἔσται τὸ ρ μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτειν, τὸ δὲ σ ἐξωτέρω τοῦ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη. ὡς δὲ ἡ ζε πρὸς εη, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. τὸ δὲ ὑπὸ ζεη ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ρεσ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρεσ πρὸς τὸ ἀπὸ εη.



κείσθω τῇ βε ἴση ἡ βο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν σ, ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ στ, ρυ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν αβ, ἦκται ἡ τυ, δεδομένην ποιοῦσαν γωνίαν τὴν ὑπὸ εβο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τυ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν σ, ρ θέσει ἠγμέναι αἱ στ, ρυ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τυ τῇ θέσει, καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν εοβ, στβ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ σε πρὸς ερ. ἀλλ' ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ου. ὡς δὲ ἡ σε πρὸς ερ, οὕτως τὸ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ τ ου πρὸς τὸ ὑπὸ σερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. τὸ δὲ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ οβ τοῦ ἀπὸ βε. καὶ τὸ ὑπὸ τ ου ἄρα τοῦ ὑπὸ σερ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ εη ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ τ ου ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ εη λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ εη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξο. ἑκατέρα γὰρ τῶν εη, ξο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λβε. τὸ ἄρα ὑπὸ τ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ τ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τυ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥστε τὰς καταγομένας ἐν τῇ ὑπὸ ξοβ γωνίᾳ, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὅμοια τῷ ὑπὸ τυφ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ

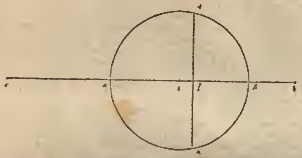
ἑκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ νξτ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ λκ τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκμ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκμ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ αε, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ τῆς ἐπὶ αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τεμεῖν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, τῇ δὲ ἡ βς. ἀπὸ τῶν ρ, ς πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, ςτ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ᾽ ἑκάτερα τεμνέτω τὰς ςτ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν φ, ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυ φ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ π. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ, διὰ τὸ ι θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, διὰ τὸ κα θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ ςβ πρὸς βε, καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ ςε πρὸς εβ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ ςε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ ςερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ςερ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίσυ. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ ξε. ἴση γὰρ ἡ ξε τῇ επ, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εη. συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ ες. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρες. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ εξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εξ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εξ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

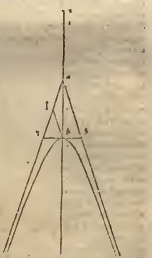
Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμή-

ματα

μενα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὃ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ θα, βη. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τῆς εα πρὸς αζ, οὕτως λαβεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ. ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ. ἔστω γὰρ ὡς δυνατὸν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλ ζ. καὶ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλ



ληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ εζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν ζα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζη, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν, δείξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ. καὶ προκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολήν. ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ. καὶ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δε η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν εη ὑπερβάλλοντα, ὅμοια τῷ ὑπὸ δεη. λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ γα, αβ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν

ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν γβ τῷ παραπλάσιον ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεκ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεκ ἄλλους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

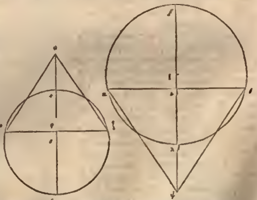
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

Ἐν δὲ τῇ συνθέσει περιεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀριθμίμενος τῆς ἡμίσειαν αὐτῆς ἴσην τῇ ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ὑπὸ τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδ χ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδ χ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ, τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ β, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει περιελθούσαις πάσαις τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ λέξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ, τῶν ἄρα ωεζ, ψθκ κώνων



κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τοῦ ωφ πρὸς τὴν εζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῆς σφαίρας δεδομένας, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ εζ καὶ ἡ πφ. καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς εζ ἡ εφ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ πφο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φο, ἀλλὰ καὶ ἡ φπ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς. δέδοται ἡ σο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οφ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς σο πρὸς οφ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς σοφ πρὸς τὴν οφ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ωφ πρὸς φο. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ωφ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ εζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ωφ πρὸς εζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χτ πρὸς αβ λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν αβ, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χτ.

Ὅτι δὲ ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ εζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν εν δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ ενφ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς εφ πρὸς φν λόγος δοθείς ἐστι. καὶ δέδοται ἡ εφ ἡμίσεια οὖσα τῆς εζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φν. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπεὶ δὴ δέδοται ἡ εζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς εζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φν τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ ν. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φν. ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ κθ πρὸς δλ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψυ πρὸς θκ, ἡ χτ πρὸς δλ, ἐναλλὰξ ἡ ψυ πρὸς χτ, ἡ κθ πρὸς δλ. ἀλλ' ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς τὴν δλ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δλ. ἐπειδὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς βα πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κθ πρὸς δλ. καὶ ὁ τῆς βα ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κθ πρὸς δλ. ὥστε ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ βα πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δλ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, θκ, ς, δλ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δλ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

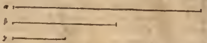
ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς ρν, ἡ βπ πρὸς πθ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ μν, γθ. ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β λ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βγ, οὕτως ἡ λν πρὸς μν. ἀλλ' ὡς ἡ βγ πρὸς βπ, ἡ μν πρὸς νρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γβπ, μνρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βθ πρὸς βπ, ἡ λν πρὸς νρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, οὕτως ἡ λρ πρὸς ρν. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ αγ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γπ. δέδοται δὲ καὶ ἡ βπ, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ βγ διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ εζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς βγ πρὸς εζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ϛ.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γθ, μν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γπ, μρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ βπ, πρὸς τὴν τρίτην τὴν πθ,

γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττοῦσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς β.



Τὸ ἄρα ὑπὸ θζ η πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ὑπὸ θζη τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ἔσται τοῦ διχοτομίας ἐφεστηκὸς τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα ἐὰν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἐγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὡς οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν αδε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ βγ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν βγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αζε. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν εδ. καὶ ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε.



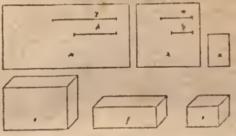
Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβκ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσὶν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ βν πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, οὕτως τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θζ, ζκ πρόσκειται ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζη. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιόν ἐστι τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιόν ἐστι τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-



μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τῆς β πρὸς δ. ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω. ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ο.



ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν, ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν, ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς γ ἐπὶ τὴν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ν, ξ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ' ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σύνδυο λαμβανόμενοι, καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τῆς β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δὲ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὴν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὴν α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγέθων ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησί, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς ν θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἴσῳ τῷ κώνῳ.

τοῦ κώνου τὸν αὐτὸν ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ βαδ κώνου πρὸς τὸν βγδ κῶνον, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θγ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ βγδ τμῆμα, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς κθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς κθ πρὸς θγ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ, ὁ τοῦ ὑπὸ κθα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθα πρὸς τὸ ἀπὸ γθ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ, ὁ τοῦ ὑπὸ κθα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθα ἐπὶ τῆς θα, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βαδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ. τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θγ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ τῆς θκ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. τουτέστι ὅτι μείζων ἡ ζθ τῆς θκ. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν. αἱ ἴσαις γὰρ ταῖς αθ, θγ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζα, γκ.

Ταῦτα εἰπών, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δὲ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζθ τῆς θκ μείζων ἐστί, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θκ. ὥστε τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ, τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ αθ πρὸς θγ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς αβ πρὸς βγ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον. ὡς γὰρ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θβ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, αβθ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογόν ἐστιν. ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ

θβ. καὶ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάστος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενος ἐστὶν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θκ, τῆς θκ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὲ ὅτι τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ὑπὲρ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσον ἐστί. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θκ, τουτέστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θκ καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἔχειν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. τουτέστιν ἐστὶ τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θα κε. ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς κθ τῆς γθ. ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δείξει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γκ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ κλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε. μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κε πρὸς θβ. τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ κγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ κγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ. οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ κγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ γκ, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ θα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα κγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἐναλλὰξ, ἡ ἄρα κγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλ αθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ κγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθ κε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ. ἡ ἄρα κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ

αθ ἐπὶ τῆς θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς βθ πρὸς θγ, τουτέστι τῷ τῆς αθ πρὸς βθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς αθ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστι τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ θζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον λόγου, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ βα τῆς μὲν ακ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς βα, τὸ ἀπὸ τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων οὐσῶν. ὥστε τοῦ ἀπὸ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ αβ ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ ακ, κβ. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ ακ τοῦ ἀπὸ κβ, τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ ακ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ᾽ οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔστω τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ, κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ, ὕψος δὲ τὴν δε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αργ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακγ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ αὐτόθι, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἐπὶ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων ἐπὶ τὴν ἑτέραν. τοῦτον δὲ ἐστὶν εἰπεῖν. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἔλασσόν ἐστι, τοσούτῳ πλεῖον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κβ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ βγ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν βκ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι. τῷ ὅλῳ γὰρ τὸ ὑπὸ γακ ἴσον τῷ ἀπὸ αβ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γα, καὶ ακ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γξ ακ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ αβ, τουτέστι τῷ ἀπὸ αρ.

Μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ακ, γξ, τῷ ἀπὸ αρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ αργ τοῦ ὑπὸ ακγ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ αργ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ αρ, τῷ δὲ ὑπὸ ακγ τοῦ ὑπὸ ακ γξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ αργ μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ, τοῦ ὑπὸ ακγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ακ γξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αργ, μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γαρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ ακγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ακ γξ ἴσον τῷ ὑπὸ ακξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γαρ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ακξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μκγ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς ακ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ μκ πρὸς κα. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μκγ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ξκα μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γαρ. καὶ τὸ ὑπὸ γαρ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ μκγ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι

εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τῆς βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δύναμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ ολ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς ολ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λο. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα οὖσαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ εἰς τὸ δεύτερον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης ὑπὸ τοῦ μιλησίου μηχανικοῦ ἰσιδώρου ἡμετέρου διδασκάλου.

Εὐτοκίου πίνυτε γλυκερὸς πόνος, ὃν ποτ' ἐκεῖνος
γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

Εὐτοκίου

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙμήδους τοῦ κύκλου μέτρησιν.

Ἑπόμενον ἂν ἦν τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ Ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἐπεὶ ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆσαι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον Ἀρχιμήδει βιβλίδιον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τί ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ Ἱπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω, τούς τε τὴν Εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησὶ σύνεγγυς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

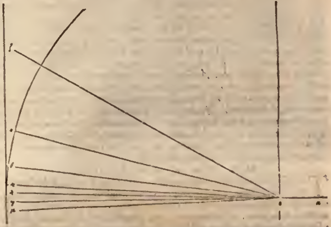
ΕΙΣ ΤΟ Α ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ προκείμενον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γεγυμνασμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ Ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀκόλουθον πάντως ἀποσωζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησὶν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστὶν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπ' ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρὴ, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπ' Ἀρχιμήδους γράφεται. ἔστι γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, πάντη που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διαστατῶν. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφαίνετο δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενός ἐστι ζητούμενον. τὸ τοίνυν ὑπὸ Ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτόν ἐστιν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευρὰς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν κατακεχρημένος ἐγένετο. θαυμαστὸς δὲ ἂν μᾶλλον καὶ τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑποδεικνύουσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ π ο ς τρίγωνον, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α ζ ο μ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς, εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκεί-

νου γωνίαν ἀναλύεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτου ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν δίχα τεμόντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ β εἰς ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν εζ. ἔσται ἡ ὑπὸ γεζ τρίτου ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τῷ γ ἀπολειφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τοῦ τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γεζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς ζγ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζγ ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε, συσταθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου ἰσοπλεύρου. ἄρα τριγώνου ἥμισυ ἐστι τὸ γεζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ εζ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς γζ. ἡ δὲ εγ πρὸς γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ ὑπόκειται τς. ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν γενήσεται $\overset{\theta}{M}$,γχλς. ἡ δὲ γζ ἐστι ρνγ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{M}$,γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ εγ, γζ. ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ εζ ὄντος $\overset{\theta}{M}$,γ,χλς, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{M}$,γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{M}$ σκζ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον. λείπει γὰρ ἡ τῶν σξε δύναμις τῆς ἀκριβοῦς μονάσιν β. αἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εζ τς	ἡ ζγ ρνγ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{M}$ σκζ
ἐπὶ τς	ἐπὶ ρνγ	τὸ δὲ σξε ἐφ' $\overset{\zeta}{M}$ σκε
$\overset{\theta}{M}$ αω	$\overset{\alpha}{M}$ ετ	ἐπεὶ δ' ἐλάττω ἄρα $\overset{\beta}{M}$
αω λς	ζχν	Μ Μ β α εἰς τὸ ἀκριβές
# $\overset{\theta}{M}$,γχλς	υνθ	$\overset{\beta}{M}$,γχτ
	$\overset{\beta}{M}$,γυθ	ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζε εγ πρὸς εγ, ἡ ζγ πρὸς γη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. συναμφότερος δὲ ἡ εζ, εγ μείζων ἐστὶν ἤπερ φοα. ἡ μὲν γὰρ ζε ὑπόκειται τς. ἡ δὲ εγ σξε καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζων εἰσὶ τῶν φοα. ἡ δὲ ζγ ἐστι ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ὥστε καὶ ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ

ἤπερ φοα πρὸς ρνγ, ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΗ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν Μ λδ ͵θυν πρὸς Μ β ͵γυθ. συναχθήσεται δὲ τοῦτο οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθεῖτο τὴν μὲν ΕΓ φοα, τὴν δὲ ΓΗ ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ ΕΓ Μ λβ ͵ϛμα. τὸ δὲ ἀπὸ ΓΗ Μ β ͵γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ ΕΗ, ἔσται Μ λδ ͵θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϟα η' ἔγγιστα. ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τῶν φϟα η' ἴσον τετράγωνος εἰς τὸ ἀκριβὲς Μ α κα ϛ' ιϛ' ἔγγιστα. ἡ ἄρα ΕΗ πρὸς ΗΓ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν Μ λδ ͵θυν πρὸς Μ β ͵γυθ. μήκει δὲ ὃν φϟα η' ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ΕΓ φοα	ἡ ΗΓ, ρνγ	φϟα η'
ἐπὶ φοα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϟα η'
Μ κε Μ γ ͵εφ	Μ α ͵ετ	Μ κε Μ ͵εφξβ ∠'
Μ γ ͵δ λο	͵ε ͵β φ͵ ρν.	Μ ͵ε ηρ ϟ ια δ'
φοα	τ ρνθ	φϟα η'
Μ λβ ͵ϛμα	# Μ β ͵γυθ	ξβ ζια δ' ϙξ δ'
	# Μ	θ υκη ζ' δ' ξδ'
Εκ τούτων συνάγεται		Ελλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ ΕΗ		Μ α κα ϛ' ιϛ' ἔγγιστα
Μ λδ ͵θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΓΕ τῇ ΘΓ, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ΗΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΗΘ πρὸς ΘΓ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ΗΕ, ΕΓ πρὸς ΕΓ, ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ΗΕ, ΕΓ πρὸς ΗΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΕΓ, φοα. καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ ΕΗ φϟα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσίν, ἤπερ ͵αρξβ η'. καὶ ἔστιν ἡ ΗΓ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ΗΕ, ΕΓ πρὸς ΗΓ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ.

Η ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΕΓ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθεῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ ΕΓ Μ ρλε ͵φλδ ∠' ξδ'. τὸ δὲ ἀπὸ ΓΘ Μ β ͵γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΕΘ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ ΕΓ, ΓΘ, ἔσται Μ ρλζ ͵γλμγ ∠' ξδ', ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αροβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ α ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ΕΓ ͵αρξβ η'	ἡ ΘΓ ρνγ	͵αροβ η'
ἐπὶ ͵αρξβ η'	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵αροβ η'
Μ ρ Μ ι Μ β ͵βξκε	μα ͵ετ	Μ ρ Μ ι Μ β ͵βρμϛ ∠'
Μ ι Μ ϛ ͵ϛσιβ ∠'	͵ε ͵β φρν	Μ ι Μ α ͵ζσκα ∠'
Μ ͵ϛ ͵γχρκζ ∠'	τρνθ	Μ ζ ͵δλρμη ∠' δ'
͵βσρκ δ' δ'	# Μ β ͵γυθ	͵βσρμ δ' δ'
ρμε δ' ξδ'		ρμϛ ∠' ξδ'
# Μ ρλε φλδ ∠' ξδ'	# Μ λ ͵γλζ ∠' ξδ'	
τὸ ἀπὸ ΕΘ ἴσον τοῖς		Ελλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ ΕΓ, ΓΘ ἐστὶ Μ ρλζ ͵γλμγ ∠' ξδ'.		Μ α ξϛ.

Ετι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΓΕ τῇ ΓΚ, ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ ΘΓΕ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΘΚ πρὸς ΓΚ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ΘΕ, ΕΓ πρὸς ΕΓ, ἡ ΘΓ πρὸς ΓΚ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ΘΕ, ΕΓ πρὸς ΘΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΚ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ΘΕ ͵αροβ η', καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ ΘΕ, ΕΓ μείζων ἐστὶ ͵βτλδ δ'. καὶ ὑπόκειται ἡ ΘΓ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ΘΕ, ΕΓ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ.

Η ΕΚ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται

ἡ μὲν

ἡ μὲν εγ, ͵βτλδ δ´. ἡ δὲ γη, ρνγ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{φμδ}{M}$ ͵ηψκγ ιϛ´. τὸ δὲ ἀπὸ γη $\overset{β}{M}$ ͵γυθ. τὸ τούτων δὲ τὸ ἀπὸ ηε. ἔσται ἄρα $\overset{φμζ}{M}$ ͵βρλβ ιϛ´. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ´. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{\circ}{M}$ μα ∠´. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵βτλδ δ´	ἡ γη ρνγ	͵βτλθ δ´
ἐπὶ ͵βτλδ δ´	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵βτλθ δ´
$\overset{υ}{M}$ $\overset{ξ}{M}$ $\overset{ϛ}{M}$ ηφ	$\overset{α}{M}$ ͵ετ	$\overset{υ}{M}$ $\overset{ξ}{M}$ $\overset{ϛ}{M}$ $\overset{α}{M}$ κφ
$\overset{ξ}{M}$ $\overset{θ}{M}$ ͵θασο δ´	͵εβφρν	$\overset{ξ}{M}$ $\overset{θ}{M}$ ͵θβψοϛ
$\overset{ϛ}{M}$ ͵θλρκζ ∠´	͵γρνθ	$\overset{ϛ}{M}$ ͵θλϛοζ ∠´
ηασρμισα	ὁμοῦ $\overset{β}{M}$ ͵γυθ	$\overset{α}{M}$ ηβψϛοπ ᾱβδ´
φπγ ∠´ ιϛ´		φπδ ∠´ δ´ ιϛ´
ὁμοῦ $\overset{φμδ}{M}$ ͵ηψκγ ιϛ´		ὁμοῦ $\overset{φμζ}{M}$ ͵βϙ ∠´ ιϛ´
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ		ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ ηε $\overset{φμζ}{M}$ ͵βρλβ ιϛ´.		$\overset{\circ}{M}$ μα ∠´

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ ∠´ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστίν, ὡς ἡ ηε πρὸς εγ, ἡ ηλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καί ἐστιν ἡ μὲν ηε ͵βτλθ δ´, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ´, καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ μείζων ͵δχογ ∠´. καί ἐστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ηεγ, εἰκοστὸν τέταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὥστε μη´ ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϙϛ´ ἄρα ἐστίν, ἧς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ, ρϙβ´ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ ϙϛ´ ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ρνγ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ρνγ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ρνγ πρὸς ͵δχογ ∠´. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ $\overset{α}{M}$ ͵δχπη. ὁ γὰρ ϙϛ ἐπὶ τὸν ρνγ πολυπλασιαζόμενος τοσοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ $\overset{α}{M}$ ͵δχπη πρὸς ͵δχογ ∠´. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει $\overset{\circ}{M}$ χξζ ∠´. ταῦτα δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν χξζ ∠´, ἅπερ ἐστὶ ͵δχοβ ∠´, ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου $\overset{\circ}{M}$ α´. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ´ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζομεν τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτου ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστιν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ, ἔσται ἡ γβ, ψπ. ὥστε τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἔσται $\overset{σμγ}{M}$ ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ $\overset{ξ}{M}$ ͵ηυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ $\overset{ρπβ}{M}$ ͵εσ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς

ἀκριβοῦς Μ α. διό φησιν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ αβ πρὸς βγ, ἤπερ ͵ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αγ ͵αφξ
ἐπὶ ͵αφξ
Μ Μ Μ
Μ Μ Μ
Μ Μ ͵γχ
ὁμοῦ Μ ͵γχ
ἃ ἀφελόντες τὰ ἀπὸ βγ ἀπὸ τῆς αγ, καταλείπονται
Μ ͵ες.

ἡ γβ ψπ
ἐπὶ ψπ
Μ Μ ϛ
Μ ϛ ϛυ
ὁμοῦ Μ ͵ηυ

͵ατνα
ἐπὶ ͵ατνα
Μ Μ Μ α
Μ Μ Μ ͵ιε
Μ Μ ͵βφν
͵ατνα
ὁμοῦ Μ ͵εσα
πολυπλάσια τῆς ἀκριβοῦς Μ α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αζ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ. καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηζγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ. καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς γβ, καὶ ἡ αη πρὸς ηγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ, ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς αγ, ἡ βζ πρὸς ζγ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς αγ, ἡ βγ πρὸς γζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς βγ, ἡ αγ πρὸς γζ. καὶ ἔστιν ἡ Μ β ἐλάσσων, ἢ ͵ατνα. ἡ δὲ αγ ͵αφξ, ἡ δὲ βγ, ψπ, συναμφότερος ἄρα ἡ αβ, βγ πρὸς βγ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς γζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς γζ, ἡ αη πρὸς ηγ, καὶ ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. διὰ τοῦτο, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ αη Μ ͵γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ Μ ͵ηυ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. καὶ τὸ ἀπὸ ἄρα ἴσαι Μ ͵βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵γιγ ∠ δ΄ ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως Μ τξη ις. διὰ ταῦτα οὖν φησιν, ὅτι ἡ αγ πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵γιγ ∠ δ΄ πρὸς ψπ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ͵βϡια
ἐπὶ ͵βϡια
Μ Μ Μ β
Μ Μ λ
Μ ϡρ
͵βϡια
ὁμοῦ Μ ͵γϡκα

ἡ ηγ ψπ
ἐπὶ ψπ
Μ Μ ϛ
Μ ϛ ϛυ
ὁμοῦ Μ ͵ηυ

͵γιγ ∠ δ΄
ἐπὶ ͵γιγ ∠ δ΄
Μ Μ ͵θ ͵αφψν
Μ ͵θλθ β ∠
͵θλθ ∠ ∠ δ΄
͵αφϛ ∠ δ΄ η΄
ψνγ δ΄ η΄ ις΄
ὁμοῦ Μ ͵βχπθ ις΄
ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ τξη ις΄

τὰ ἀπὸ τῶν αη ηγ ὁμοῦ Μ ͵βτκα

Δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. διὰ οὖν τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τῷ ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ, ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ, ἡ αθ πρὸς θγ. καὶ ὑπόκειται ἡ Μ α ἐλάσσων ἢ ͵βλια. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἤπερ ͵γιγ ∠ δ΄. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵ελκδ ∠ δ΄. ἡ δὲ ηγ ἐστὶ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ γα, αη πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ελκδ ∠ δ΄ πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ελκδ ∠ δ΄ πρὸς ψπ. ὥστε ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ανε ∠ δ΄ πρὸς ξ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ. ἐπεὶ τούτων τετραπλάσια, ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γάρ φησιν, ὅτι ἑκατέρα ἑκατέρας ἐστὶ δ΄ ιγ. καὶ ἐπειδὴ ἡ αθ ἐστὶν ͵αωκγ. τὸ ἄρα ἀπ᾽ αὐτῆς ἐστὶ Μ ͵γλκθ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ θγ σμ. καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς Μ ϛ ͵ϛ. καὶ ἐστι τοῖς ἀπὸ αθ, θγ ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἴσα ἄρα Μ ͵ηλκθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αωλη θ΄ ια΄. τὸ γὰρ ἀπ᾽ αὐτῆς ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ τκα ἐγγύς. ὥστε ἡ αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωλη θ΄ ια΄ πρὸς σμ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

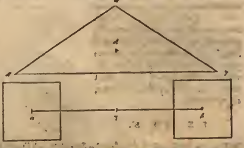
ἡ αθ ͵αωκγ   ἡ θγ σμ   ͵αωλη θ΄ ια΄

δ˜, ἅπερ ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι ͵ζ, κζ < ς˝ ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ς ο̄ ζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμονα. ὡς μὲν οὖν ἐν χώρᾳ οἱ παρ᾽ αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. ἱστέον δὲ ὅτι καὶ ἀπολλώνιος ὁ περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ διὰ ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πόρος ὁ νικαεὺς δύναιτ᾽ ἂν εὐρυθῆσεται, μέμψιν ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ᾽ ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ˜ φημὶ καὶ τῶν ι θ΄. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ κατάγειν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποίηκα ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐγνώκειν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ᾽ ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

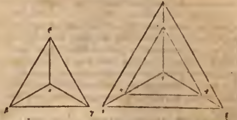
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ τοῦ κύκλου μέτρησιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

ΤΗΝ ῥοπὴν, ὦ γενναιότατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθεῖ. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος ταύτην ῥοπὴν ἐπὶ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἕξεσι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσιν ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τοῦ πτολεμαίου συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν ταῦτα ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι, οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ α β γ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδὲ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ α, β, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α, β μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἐκ τοῦ γ ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ α, β μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α, β μεγεθῶν τὸ γ.

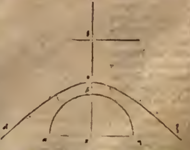


Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ γεμῖνος ἀπὸ τῶν περὶ τοῦ ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὰ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν ἀξίωμά ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς. καί ἐστι πάντα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπιβεβλημμένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φασὶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τοῦ μὲν αβγ τὸ η, τοῦ δὲ δεζ τὸ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηγ, βη, δθ, θε, θζ. λέγω ὅτι ἴσας διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν η θ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς ... καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ. ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ εθ πρὸς



θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόζει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ η ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰ μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ αη, βη, γη, ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς ταῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γάρ εἰσιν δίχα ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.

Παντὸς σχήματος οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ἦ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶμεν δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς περὶ ... γραμμένοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γὰρ τινῶν σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματος ἐστὶ τὸ ε, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἀφ' οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλόν ἐστι τῷ ὁρίζοντι, ἐντός ἐστι τῆς περιμέτρου. εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.



ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ ἀδύνατον. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αβ δέδεικται. εἴρηται γὰρ αὐτόθι, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστὶν, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ, οὕτως ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι. ὥστε ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ἢ εἰ μεῖζον ἐστὶ τὸ α β τοῦ γ, ὥς τι ἰσοῤῥοπεῖν, ἢ οὔ. τούτου δὲ ῥηθέντος δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑπάρχοντος πάντως τοῦ α β μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ περὶ τὴν ἰσοῤῥοπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλαττον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάνυ καὶ ἄνισον ποιεῖν τὸν λόγον. ὥς τι καὶ ἀφαιρεῖσθαι ἀπὸ τοῦ α β ἔλασσον τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ μεῖζον ἐστὶ τὸ α β τοῦ γ, ὥς τι ἰσοῤῥοπεῖν, ὥς τι λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. διὰ φησὶν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ α β μέγεθός τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ περὶ τὴν ἰσοῤῥοπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῆς στοιχειώσεως Εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν Θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

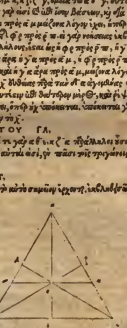
Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ζ, η κ, λ μ. παράλληλοι δὲ αὗται πρὸς τὴν β γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἴση ἡ β ο τῇ ψ γ, καὶ ἡ δ β τῇ δ γ. ἔσται ὡς ἡ δ β πρὸς ο β, ἡ δ γ πρὸς ψ γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δ ο πρὸς ο β, ἡ δ ψ πρὸς ψ γ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ δ ο πρὸς ο β, ἡ α ε πρὸς ε β. ἡ γὰρ ε ο παρὰ τὴν α δ ἐστιν. ὡς δὲ ἡ δ ψ πρὸς ψ γ, ἡ α ζ πρὸς ζ γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α ε πρὸς ε β, ἡ α ζ πρὸς ζ γ. παράλληλος ἐστιν ἄρα ἡ ε ζ τῇ β γ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ α δ γ πρὸς τὰ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ α δ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ γ α πρὸς α μ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά ἐστι τὰ α δ γ α ς μ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α γ πρὸς α μ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ α γ τῆς α μ τετραπλασίων, τὸ α δ γ τρίγωνον πρὸς τὸ α ς μ λόγον ἔχει, ὃν ις πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ α μ, μ κ, κ ζ λόγον ἔχει ὃν ις πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ, ὅμοια τῷ α δ γ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ α ς μ, τουτέστιν ἡ γ α πρὸς α μ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, καὶ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλὰ ἡ γ α πρὸς α μ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. ὁ γὰρ τῆς α γ πρὸς α μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς φ ρ πρὸς ρ π. εἰ γὰρ νοήσειας ἐκβεβλημένας τὰς ρ φ, γ δ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φ ρ πρὸς ρ π, ἡ γ δ πρὸς δ ω. ἀλλ' ὡς ἡ γ δ πρὸς δ ω, ἡ γ α πρὸς α μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ α πρὸς α μ, ἡ φ ρ πρὸς ρ π. ἡ δὲ φ ρ πρὸς ρ π μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. καὶ ἡ γ α ἄρα πρὸς α μ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὴν δ α ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσεσθαι πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ἐν τούτοις δῆλον ὅτι ἐπ' ἐκείνου πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσοῤῥοπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΓΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐν τῇ κειμένα τὰ θ κ, λ ι δύο τρίγωνα. αἵ τε γὰρ α θ ι, κ ζ α παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θ λ γ, θ κ β αἱ αὐταί εἰσι, ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις, καὶ λοιπαὶ αἱ κ δ, δ λ.

ΕΙΣ ΤΟ ΓΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γ δ η, ζ ε η, β α θ, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβληθεισῶν γὰρ τῶν β α η, ζ ε η, καὶ συμπιπτουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ η. καὶ ἡ β δ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἐστι δὲ ὡς ἡ ε η πρὸς η α, ἡ ζ η πρὸς η ε, καὶ α β ζ πρὸς α ε, καὶ ἡ ζ γ πρὸς ε δ. καὶ διαλλὰξ ἡ δ η πρὸς δ ε. ἔσται δὴ τοῦ β δ γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς θ μ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἡ β θ τῆς β δ. ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ α η, β ζ, γ δ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τοῦ αὐτοῦ πλάνα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ α δ, β δ, β ε, ε γ, γ ζ, ζ α, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η ση-



μένον, βάσις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι. ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ α ζ β τρίγωνον, τοῦ η β ε τριγώνου. ὥστε καὶ ἡ α η τῆς η ε. ἐὰν δὲ διὰ τοῦ η παρὰ τὴν β γ ἀγάγωμεν τὴν θ η κ, διπλασία ἐστὶν ἡ α θ τῆς θ β, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ βιβλίον τέλος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙμήδους.

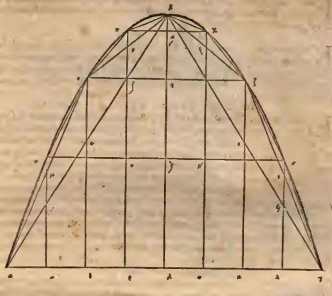
ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τὰ πρῶτα, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ α β, γ δ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. τοῦτο δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν. ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς καὶ ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἶπεν, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου τοῦ τριγώνου ἐπιπέδου εὐθυγράμμου ὄντος, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τάδε ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλα ἐστὶ διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

ΤΟΥ δευτέρου θεωρήματος τὸ λέγει τινά. δηλοῦντα τὰς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφῆναι, καὶ φησὶ τοῦτο δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς α β γ, καὶ εὐθείας τῆς α γ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ β δ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ Ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς α β, β γ, ἔσται τὸ ἀπὸ α β γ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν α β κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ β δ. ἐὰν δὲ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν α β, β γ τμημάτων τὰς ε, ζ, διὰ αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ β δ, ὡς τὰς ε κ, ζ ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν α β, β γ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροί εἰσι τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς α β, β γ. ἔσται δὲ καὶ ἡ ε λ ζ παρὰ τὴν α β γ. ἐπειδὴ αἱ ε θ, ζ κ παράλληλοί εἰσι καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ε τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ ε θ κ παράλληλός ἐστι τῇ β δ, ἐστὶν ὡς ἡ β κ πρὸς κ α, ἡ δ θ πρὸς θ α. ἴση δὲ ἡ κ β τῇ κ α. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ ε κ διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ θ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ δ κ τῇ κ γ ἴση ἐστί. ἴση δὲ ὅλη ἡ α δ τῇ δ γ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ δ κ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ε λ τῇ λ ζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ α ε, ε β, β ζ, ζ γ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, ο σημεῖα. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν β δ, αἱ π μ ρ σ, τ ν υ φ, χ ξ ψ ω, ς ο ϛ λ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α π, π ε, ε τ, τ β, β χ, χ ζ, ζ ς, ς γ. καὶ αἱ τ ρ χ, καὶ π β γ δ ς. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τ χ καὶ ἡ ε ζ καὶ ἡ π ς παράλληλοί εἰσι τῇ α γ. καὶ ὅτι ἴση ἡ τ ρ τῇ ρ χ. καὶ ἡ π δ τῇ δ ς. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν β δ εἰς τοὺς ἑξῆς περιττοὺς ἀριθμούς, τουτέστιν οἵων ἐστὶν ἑνὸς ἡ β ρ, τοιούτων

τριῶν

τριῶν ἡ α ε λ, καὶ ἡ κ δ πρώτη, καὶ ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α η τῇ η β, καὶ παράλληλος ἡ ι β τῇ β δ, ἴση ἄρα καὶ ἡ α β τῇ β δ, ἡ α δ ἄρα τῆς δ θ διπλῆ ἐστιν. ὥστε καὶ τῆς ε λ, τὸ



ἀπὸ τῆς α δ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε λ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως δείκνυται ἡ β δ πρὸς β λ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δ β τῆς β λ. τριπλῆ ἄρα ἡ δ λ τῆς λ β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λ β, τοιούτων τριῶν ἐστιν ἡ λ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δή. καὶ οἵων ἄρα ἡ λ β τεσσάρων, ἡ λ δ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ε υ τῇ υ β, καὶ ἡ ε ζ τῇ ζ λ, καὶ ἡ θ φ τῇ φ δ, διπλασία ἐστὶν ἡ ε λ τῆς λ ζ, τουτέστι τῆς τ α. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ε λ τοῦ ἀπὸ τ α, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λ β τῆς β α. ὥστε τριπλασία ἡ λ α τῆς α β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λ β τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α μ τῇ μ ε, καὶ ἡ α ρ τῇ ρ η, καὶ ἡ α ς τῇ ς θ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α ς, ς θ, θ φ, φ δ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ α δ τεσσάρων, τοιούτων ἡ ς δ τριῶν, τουτέστιν ἡ π δ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ α δ δεκαέξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ π δ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δ β δεκαέξ, ἡ β δ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ λ δ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ β δ δεκαέξ, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ ἑπτά. καὶ λοιπὴ ἡ δ δ ἐστὶ πρώτη. τέμνεται ἄρα ἡ β δ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῆς διαμέτρου εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς,* οἵου γάρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τ α, τοιούτων ἐστὶ δύο ἡ ε λ, τριῶν δὲ ἡ π δ, τεσσάρων δὲ ἡ α δ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὠνομάσθη δὲ ὑπὸ ἀρχιμήδους τὸ α π ε τ β χ ζ ε γ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσί, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαί εἰσι, τὸ δὲ γνώριμον ἐγγραφόμενον σχῆμα εἴρηται ἐν τῷ προλαβόντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρεῖσθαι

τὰς

τὰς διαμέτρους δῆλον, ἵνα τὰ τμήματα αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστὶν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῶν στοιχείων, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θζηι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ κζ, λη. ἴσων γάρ εἰσι τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ βδ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θζ, ἡ λι πρὸς ιη, καὶ ἐναλλὰξ καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θζ τῇ ιη, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γάρ εἰσι πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θζηι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Ἔστω δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θι μὲν ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς βδ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζη, καὶ ἡ εν διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν ακβ, βλγ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ βαγ τρίγωνον πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, ἤπερ τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ αβκ, βλγ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ ακβλγ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τῆς τε τμηθείσης κατὰ τὸ ρ κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ αβγ πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα. ἐπεὶ δὲ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γάρ ἐστι τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ετ ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα ἀνωτέρω τοῦ ρ πεσεῖται τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ ϛ.

Τὸ κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἐν τῇ βδ, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ εἰ τύχοι τὸ ε, τῆς βδ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν βε τῆς εδ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πεσοῦνται τῶν βε σημείων. καὶ ὅσῳ δ' ἂν πολυπλευρώτερον ᾖ τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ β. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς εβ ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς βε, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

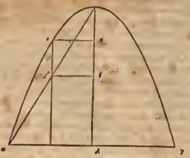
ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Ἐγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ αβγ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δεζ τμήματι, ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ διὰ αβγ παραβολῆς ἴσαι γένωνται διὰ δεζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ αβγ τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ δεζ ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ διὰ κορυφαί εἰσι τὰ β, ζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοια ἐστὶ τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ κμ πρὸς μζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα ἕξει κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τὰς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ βδ πρὸς δθ, ἡ κζ πρὸς ζμ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ βδ πρὸς κζ, οὕτως ἡ δθ πρὸς μζ. τετραπλασία δὲ ἡ βδ διὰ κζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον θ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ αβγ, ἧς διάμετρος ἡ βδ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ εζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ αβ τμήματος. καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ εκ, ζθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αζ τῇ βζ, διπλῆ ἐστιν ἡ αβ τῆς ζβ, καὶ ἡ δβ τῆς βθ, καὶ ἡ αδ τῆς ζθ, τουτέστι τῆς εκ. ὥστε τὸ ἀπὸ αδ τοῦ ἀπὸ εκ ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δβ τῆς βκ ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ βδ τῆς

μὲν



μὲν βθ διπλῆ, ἡ βθ τῆς βη ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἡ θη τῇ ηβ ἴση, τουτέστι τῇ εζ. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ εηζθ. τετραπλασία ἄρα ἡ βδ τῆς ζε.

Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ βδ τῆς βς. καὶ γὰρ τοῦτο δέδεικται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ βδ ἑκατέρας τῶν βη, εζ τετραπλασία, ὥστε ἡ βη τῇ εζ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐν τούτῳ ἡ βς τῇ ηζ ἴση, καὶ ἡ βδ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ βδ τῆς βς, οἵων ἄρα ἡ βδ τεσσάρων, ἡ βς ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ βδ δώδεκα, τοιούτων ἡ βς τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ βς τῆς ςξ, οἵων ἄρα ἡ βς τριῶν, ἡ ξς ἑνός, καὶ ὅλη ἡ βξ τεσσάρων. τούτων δὲ ἦν ἡ βδ δώδεκα. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλάσιον δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ τμήματος. δέδεικται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐπίτριτόν ἐστι, καὶ διελόντι τὸ αβγ τρίγωνον τῶν αηβ, βκγ τμημάτων τριπλάσιόν ἐστι, καὶ ἐν τῷ τῆς εδ τριπλασία. ἡμιολία ἄρα ἐν τῷ ἡ βθ τῆς θδ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστὶν ἡ βδ τῆς δε. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ εδ πέντε· οἵων δὲ ἡ δε πέντε, τοιούτων ἡ θε ἑνός, καὶ ὅλη ἡ θε, δε ἕξ. ἑξαπλασία ἡ δθ τῆς θε. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ δθ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ θβ ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ βθ τῆς θδ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Τὸ ἔνατον θεώρημα πάνυ ὂν ἀσαφὲς ἐκθησόμεθα παραφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, βγ, δβ, βε, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ αγ, γδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, βδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἔστιν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ αγ, γδ, τουτέστιν ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, γβ πρὸς τὴν β τῆς δβ. πάλιν ἐπειδὴ αἱ γβ, βδ, βε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ αγ, γδ, δε. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ γβ, βδ πρὸς βε. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ, καὶ συναμφότερος ἡ γβ, βδ, τουτέστι δύο αἱ αβ, καὶ τρεῖς αἱ γβ, καὶ μία ἡ βδ. ἑπόμενα δὲ ἡ β τῆς βδ, καὶ ἡ βε μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς δβ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς ε τῆς αβ, καὶ τῆς δ τῆς γβ, καὶ τῆς δ τῆς δβ, καὶ τῆς ε τῆς βε, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β τῆς αβ καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς βδ μόνης. ἐλάσσων δὲ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς ε τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δβ, καὶ τῆς εβ μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε τῆς αβ, καὶ τῆς γ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς δβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς

διπλῆς τῶν β δ, καὶ μόνης τῆς ε ζ. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ γ τῆς γ ζ, καὶ τῆς β δ
μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β τῶν β δ, καὶ μόνης τῶν ε ζ, οὕτως ἐδείχθη ἡ α δ πρὸς δ ε.
καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν α ζ, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ ζ, β δ,
πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῶν β τῶν β δ, καὶ μόνης τῆς ε ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α δ πρὸς
δ ε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῶν α δ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνη τῆς
δ ε. ἔστω ἡ δ ο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α δ πρὸς δ ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν α ζ, β ε,
καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γ ζ, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β τῶν β δ, καὶ μόνης τῆς ε ζ.
ἀνάπαλιν ἄρα δεῖν ὡς ἡ ο δ πρὸς δ α, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β τῶν β δ, καὶ μόνης τῶν ε ζ, πρὸς τὴν
συγκειμένην ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν α ζ, β ε, καὶ τῶν δ συναμφοτέρου τῶν γ ζ, β δ, καὶ
συνθέντι, ὡς ἡ ο α πρὸς α δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β τῶν α ζ, καὶ δ τῶν γ ζ, καὶ ς τῶν β δ,
καὶ γ τῶν β ε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν α ζ, β ε, καὶ δ συναμφοτέ-
ρου τῶν γ ζ, β δ. ἥ τε γὰρ β δ ἑξάκις παρελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν
τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ ζ ε τρὶς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπό-
κειται δὲ καὶ ἡ α δ πρὸς κ θ τὸν αὐτὸν ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε συναμφοτέρου
τῶν α ζ, β ε, καὶ ι συναμφοτέρου τῶν γ ζ, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῶν α ζ, καὶ δ τῶν
γ ζ, καὶ ς τῶν β δ, καὶ γ τῶν β ε. καὶ ἔστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα δεῖν ὡς ἡ ο α πρὸς
κ θ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε συναμφοτέρου τῆς α ζ, β ε, καὶ ι τῶν γ ζ, β δ, πρὸς τὴν συγ-
κειμένην ἔκ τε τῶν β συναμφοτέρου τῶν α ζ, β ε, καὶ δ τῆς γ ζ, β δ. τὸ γὰρ τῶν γεγραμμένης
ἀναλογίας οὕτως ἔσται δῆλον. ἐπεὶ γὰρ δεῖν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο α, πρὸς
ἑπόμενον τὴν α δ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β τῆς
α ζ, καὶ δ τῶν γ ζ, καὶ ς τῶν β δ, καὶ γ τῆς β ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συν-
αμφοτέρου τῆς α ζ, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ ζ, δ ζ. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν
ἑπόμενον ἡ α δ πρὸς ἄλλο τι τὴν κ θ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη
ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς α ζ, β ε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γ ζ, β δ, πρὸς τὴν συγκει-
μένην ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ δ τῆς γ ζ, καὶ ς τῆς β δ, καὶ γ τῆς β ε. ἐπεὶ ἡ ε συναμφο-
τέρου τῆς α ζ, β ε πρὸς τὴν β τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ι συναμ-
φοτέρου τῆς γ ζ, β δ πρὸς τὴν δ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε
πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ
τῆς ε συναμφοτέρου τῆς α ζ, β ε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γ ζ, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς
β συναμφοτέρου τῆς α ζ, β ε, καὶ δ τῆς γ ζ, β δ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ α ο
πρὸς κ θ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς δευτέροις, ὅτι ἡ ο δ πρὸς δ α
τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε ζ μετὰ τῆς β τῆς β δ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β συναμ-
φοτέρου τῆς α ζ, β ε, μετὰ τὴν δ συναμφοτέρου τῆς γ ζ, β δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώ-
τοις μεγέθεσιν, ἡ α δ πρὸς ἄλλο τι τὴν δ ε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγ-
κειμένη ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ γ τῆς γ ζ, καὶ μόνης τῆς δ ζ πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς
ε ζ, καὶ τῆς β τῆς β δ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀνα-
λογίας, δι' ἴσου δεῖν ὡς ἡ ο δ πρὸς δ ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς γ τῆς γ ζ,
καὶ μόνης τῆς β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α ζ, β ε, καὶ δ τῆς γ ζ, ζ δ.
ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ε δ πρὸς δ ο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α ζ,
β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ ζ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ γ τῆς γ ζ,
καὶ μόνης τῆς β δ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δ ε πρὸς ε ο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχήν,
οὕτω ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α ζ ε, μετὰ τῆς δ τῆς γ ζ δ, πρὸς τὴν συγκει-
μένην ἐκ τῆς γ ζ μόνης, καὶ γ τῆς β δ, καὶ τῆς β τῆς ε ζ. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ ζ τῆς α ζ,
καὶ τῆς β ε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β τῆς α ζ μόνης, ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β τῆς
ε ζ. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ συναμφοτέρου τῆς γ ζ δ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ τῆς γ β,
καὶ ἡ β δ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γ ζ μόνη, καὶ ἡ γ τῆς β δ. καλῶς οὖν
ἐλέχθη, ὅτι δεῖν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δ ε πρὸς ε ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α ζ,
β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ ζ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γ ζ, καὶ τῆς γ τῆς δ ζ, καὶ
τῆς β τῆς ε ζ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ο ε πρὸς ε δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ ζ, μετὰ τῆς γ
τῆς β δ, καὶ β τῆς ε ζ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α ζ ε, καὶ δ συν-
αμφοτέρου τῆς γ ζ δ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ ζ πρὸς ἄλλο τι τὴν ε ζ, ἡ α ζ πρὸς β γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ

δ ε

δε πρὸς εβ. ἡ αγ πρὸς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστιν ὡς ἡ γ̄ γδ πρὸς δβ, οὕτως ἡ δε πρὸς εβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ̄ τῆς γδ πρὸς τὴν γ̄ τῆς δβ, οὕτως ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν β̄ τῆς εβ. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς εβ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ τῆς γ̄ τῆς γδ, καὶ ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γβ, καὶ τῆς γ̄ τῆς βδ, καὶ τῆς β̄ τῆς εβ. ἐπεὶ δὲ ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ οε πρὸς ἑπόμενον τὴν δε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γβ, καὶ τῆς γ̄ τῆς βδ, καὶ β̄ τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δε πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ ἡ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τῆς δε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ, καὶ β̄ τῆς βε. δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ οε πρὸς εβ, ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γδ, καὶ ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ οβ πρὸς βε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τῆς εδ, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τῆς δε, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ἴση δέ ἐστι τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς γ̄ τῆς αβ, καὶ ς̄ τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ. ἥ τε γὰρ αβ δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν αγ, καὶ ἐκ τῆς δ̄ τῆς γβ μίαν, ποιεῖ τρίτην τὴν αβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄ τῆς γβ μίας, γίνεται γ̄. προσλαβοῦσα δὲ τὴν γ̄ τῆς γδ, καὶ γ̄ τῆς δβ, ποιεῖ τὴν ς̄ τῶν γβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄ δβ, γ̄, μένει μόνη ἡ δβ. προσλαβοῦσα δὲ τήν τε β̄ τῶν δε, καὶ τὴν β̄ τῶν εβ, ποιεῖ τὴν γ̄ τῆς βδ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ οβ πρὸς εβ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ τῆς αβ, καὶ ς̄ τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ. πάλιν ἐπεὶ αἱ εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τῶν ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν εβ, βδ, δβ, βγ, βα. ἔστι ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δγ, γα, τουτέστι τὴν δα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βδ πρὸς συναμφότερον τὴν δβ, βγ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβ, βα. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς εα πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἡ εβδ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς δβγ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβα, πρὸς συναμφότερον τὴν δβγ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβα. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ εβδ μετὰ τῆς δβγ, καὶ τῶν γβα, ἴση δέ ἐστι συναμφοτέρῳ τῇ εβα, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δβγ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι. συναμφότερος δὲ ἡ δβγ μετὰ τῆς γβα, ἴση δέ ἐστι συναμφοτέρῳ τῇ αβδ, καὶ δὶς τῇ γβ, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε δεῖν ὡς ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῶν εβα, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῶν δβγ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν δβα, καὶ τῶν β̄ τῶν γβ. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῆς εβα, μετὰ τῶν δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῶν δ̄ τῶν γβ. ὥστε καὶ ὡς ἡ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ τῶν δ̄ τῶν γβ. ἀλλ' ὡς ἡ αε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἐλήφθη ἡ βε πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἡ εβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ τῶν δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ̄ τῆς γβ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ οβ πρὸς ἑπόμενον τὴν βε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ̄ συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ μετὰ τῆς ς̄ τῆς γβ, πρὸς τὴν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ εβ πρὸς ἄλλο τι τὴν ζη, οὕτως ἡγούμενον ἡ β̄ συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῶν δ̄ τῶν γβ. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας δι' ἴσου δεῖν, ὡς οβ πρὸς ζθ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ς̄ τῆς γβ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ δ̄ τῆς γβ. ἡ δὲ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ς̄ τῆς γβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ̄ τῆς γβ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. τὰ δὲ ἐξαπλάσια τῶν αὐτῶν

τετραπλασίων ἡμιόλια ἐστὶ. πῶς; δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτά, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πέντε καὶ δεκαπλάσιον. καὶ ἐστὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων ἐσὶν ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν ο α πρὸς α θ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ ο β πρὸς ζ η τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπταμόρια ἐστὶν ὅλη ἡ ζ θ ὅλης τῆς α β.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Φανερὸν δὲ, ὅτι καὶ τοῦ α δ ε γ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζ η. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζ β διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ α γ, δ ε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, ἤτοι τὸ ζ, η, παράλληλοί εἰσιν τῇ ἤτοι τῇ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δ ε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς β ζ. καὶ διὰ τοῦτο φησὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζ η. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζ β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ δ β ε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ α β γ τμῆμα τοῦ α β γ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δ ε β τμῆμα τοῦ δ ε β τριγώνου, ἔστιν ὡς τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ α β γ τρίγωνον, οὕτως τὸ δ ε β τμῆμα πρὸς τὸ δ ε β τρίγωνον. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν, ὡς τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ δ ε β τμῆμα, οὕτως τὸ α ζ β τρίγωνον πρὸς τὸ δ η β τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δ η α ζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς α ζ πρὸς δ η, καὶ τῆς β ζ πρὸς β η. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς α ζ πρὸς δ η, καὶ τοῦ τῆς ζ β πρὸς β η. ὁ γὰρ τῆς ζ β πρὸς β η λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α ζ πρὸς τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ α ζ πρὸς τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς α ζ πρὸς δ η. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ α ζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β ζ τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ, πρὸς τὸν ἀπὸ α ζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β ζ τῆς δ η μετὰ τῆς α ζ πρὸς ζ α. ἐστὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ η πρὸς α ζ, ἡ ξ ν πρὸς ν μ. καὶ ὡς ἡ β ζ τῆς δ η πρὸς α ζ, ἡ β ζ τῆς ξ ν πρὸς ν μ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β ζ τῆς ν ξ μετὰ τῆς ν μ πρὸς ν μ, ἡ β ζ τῆς δ η μετὰ τῆς α ζ πρὸς α ζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μ ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν ξ κύβον, καὶ ἡ μ ν πρὸς ν τ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δ η κύβος πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην δυνάμει ἔκ τε τῆς β ζ τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η, οὕτως ἡ δ η πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β ζ τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δ η πρὸς τὴν β ζ τῆς α ζ μετὰ τῆς δ η, οὕτως ἡ τ ν πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β ζ τῆς ο ν, καὶ τῆς τ ν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ α ζ πρὸς δ η, ἡ μ ν πρὸς ν ξ, καὶ ἡ ο ν πρὸς ν τ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δ η πρὸς α ζ, ἡ τ ν πρὸς ν ο. καὶ ὡς ἡ δ η μετὰ τῆς β ζ τῆς α ζ πρὸς δ η, οὕτως ἡ τ ν μετὰ τῆς β ζ τῆς ν ο πρὸς ν ο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β ζ τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ. δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς α ζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δ κύβος. καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς α κ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β ζ τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η. καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β ζ τῆς ν ξ, καὶ μόνης τῆς μ ν, καὶ δευτέρα ἡ μ ν, καὶ τρίτη ἡ ν τ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β ζ τῆς ο ν, καὶ τῆς ν τ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ μόνης, πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ μόνης τῆς δ η, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξ ν, καὶ μόνης τῆς μ ν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ν ο, καὶ μόνης τῆς ν τ. ἀλλ' ὡς τὰ

εἰρημένα

ἐρημένα στερεὰ πρὸς ἄλλαλα, οὕτως ἐλέχθη ἁ βι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἁ βι πρὸς ικ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τᾶς β τᾶς ξν, καὶ μόνας τᾶς μν, πρὸς τὰν β τᾶς ον, καὶ μόνας τᾶς ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἁ βκ πρὸς κι, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ συναμφοτέρας τᾶς μντ, καὶ τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς ξνο, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β τᾶς ον, καὶ μόνας τᾶς ντ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ε. ὡς ἁ κζ πρὸς κι, οὕτως ἁ ε συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι συναμφοτέρας τᾶς ξνο, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β τᾶς νο, καὶ μόνας τᾶς ντ. καὶ ὡς ἄρα ἁ ζκ πρὸς ζυ, οὕτως αὐτὰς δύο πέμπτα. ἑκατέρα γὰρ τᾶν αβ ζκ δύο πεμπταμόρια ἐστὶ τᾶς υζ. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἁ βκ ἀπόκειται, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τᾶς ε συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξνο, πρὸς τὰν β συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς ξνο. καὶ γὰρ τὰ β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόριά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἐλέχθη ὡς ἁ ζκ πρὸς ικ, οὕτως ἁ ε τᾶς μντ, καὶ ι τᾶς ξνο, πρὸς τὰν β τᾶς νο, καὶ μόναν τὰν ντ. πάλιν δὲ ἐλέχθη ὡς ἁ ζκ πρὸς ζκ, ἁ ε συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι τᾶς ξνο, πρὸς τὰν β τᾶς μντ, καὶ δ τᾶς ξνο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἁ ζυ πρὸς ζι, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τᾶς ε συναμφοτέρας τᾶς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξνο, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β τᾶς ον, καὶ μόνας τᾶς ντ, καὶ τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ δ τᾶς ξνο, ἅ ἐστιν ἴσα τᾷ συγκειμένᾳ ἐκ τᾶς β τᾶς μν, καὶ δ τᾶς νξ, καὶ ς τᾶς νο, καὶ γ τᾶς ντ. οὕτως γὰρ ἐλάφθαι καὶ ἀνώτερον. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι αἱ μν, νξ, ον, ντ, καί ἐστιν ὡς μὲν ἁ ντ πρὸς τὰν μ, οὕτως ἀλαμμένα τις ἁ ρι πρὸς τὰν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αζ, τουτέστι τᾶς μο, καὶ δὴ λελαμμέναι ἐντὶ αἱ ἐν τᾷ ῥητῷ ἀναλογίᾳ. ἔσται δὲ τὸ προειρημένον ἁ ρζ δύο πέμπτα τᾶς μν, τουτέστι τᾶς ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἁ βρ τᾶς βζ. ἁ βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο, ὥστε κέντρον βάρεος ἐστι, τοῦ αβγ τμάματος τὸ ρ σαμεῖον. ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ τοῦ δβε τμάματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἁ βχ τᾶς βη. γέγονεν ὡς ὅλα ἁ ζβ πρὸς ὅλαν τὰν βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἁ βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὰν βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἁ λοιπὰ ἄρα ἁ ζη πρὸς λοιπὰν τὰν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ δὲ ἀπόκειται ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμᾶμα, οὕτως ἁ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἁ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς υζ, τουτέστιν ἁ ζθ, ἤτοι ἁ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμᾶμα, ἁ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἐστὶ τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β τῶν ἰσοῤῥοπικῶν ἀρχιμήδους.